



UNIVERSITA' DEGLI STUDI ROMA TRE

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Gestionale e dell'Automazione

Tesi di Laurea

La gestione del conflitto nella Teoria dell'incertezza di Dempster e Shafer.

Laureando
Ludovico Pinzari

Relatore
Prof. **Stefano Panzieri**

Anno Accademico 2012-2013

Prefazione

Synergy means behavior of whole systems unpredicted by the behavior of their parts.

- R.Buckminster Fuller, *What I have learned.*

Spesso nella progettazione di un sistema di controllo basato su regole, al fine di poter individuare la miglior strategia da attuare sul processo, risulta essenziale tradurre le proprie specifiche in funzione di uno o più parametri. Tuttavia, in fase di progettazione, non sempre è possibile stabilire tutti i possibili scenari che emergono in seguito all'acquisizione di nuove informazioni provenienti da uno o più agenti. In particolare, quando la scelta di una specifica regola dipende dal modello impiegato per rappresentare lo stato di informazione del sistema, risulta fondamentale **gestire il conflitto esistente tra le varie sorgenti di informazione prese in esame**. Pertanto, le scelte progettuali di un Data Fusion System sono condizionate almeno da due componenti:

1. **statica**: che descrive lo Stato di Conoscenza dei singoli agenti che compongono il sistema.
2. **dinamica**: che regola il meccanismo attraverso il quale viene aggiornato lo Stato di Conoscenza del sistema, a partire dalla combinazione (fusione) delle informazioni dei singoli agenti.

E' evidente che per confrontare a livello generale le varie tipologie di modelli impiegati, devono essere valutate entrambe le componenti. Tuttavia, la maggior parte delle pubblicazioni si sono limitate più alla componente statica; mentre, a mio avviso, la caratteristica che rende originale un modello da un'altro è l'aspetto dinamico. Infatti l'obbiettivo principale è quello di ridurre l'incertezza, implementando un sistema d'inferenza che sia in grado di filtrare le informazioni attendibili, impiegando sinergicamente i dati delle singole sorgenti.

E' chiaro che il risultato di suddetta inferenza riflette la nostra capacità di prevedere l'avvenimento di un'evento accidentale (inaspettato) e quindi condiziona le nostre future decisioni. Purtroppo, non sempre risulta immediato tradurre l'applicazione di una specifica regola attraverso il valore di un'unico parametro; soprattutto se il valore di tale parametro risulta funzione dell'entità del conflitto e del livello di incertezza. Quindi, il nostro scopo è quello di **stabilire un metodo che ci consenta di tradurre numericamente (attraverso un singolo parametro) le specifiche di filtraggio; al fine di individuare le regole di fusione più opportune, indipendentemente dall'istanza del problema.**

La risoluzione a questo problema ha due importanti risvolti pratici:

1. Noto il Range dei valori ammissibili del parametro (che risulta indipendente dalle specifiche istanze del problema) possiamo spaziare su un continuum di regole, piuttosto che limitare la nostra scelta su un numero limitato (finito).
2. Stabilire in relazione all'entità del conflitto e dell'incertezza, quale valore del parametro risulti più idoneo per il nostro dominio applicativo.

Tale problematica è stata affrontata da Toshiyuki Inagaki, nell'articolo: *Interdependence between safety-control policy and multiple-sensor schemes via Dempster-Shafer Theory*. IEEE TRANSACTION ON RELIABILITY, vol 40, No. 2, 1991 June.

La questione fondamentale sollevata da Inagaki e che risultava inizialmente alquanto ambiziosa, era quella di fornire **un modello generale che racchiudesse tutte le regole di combinazione presenti nel Power Set** (ovvero l'insieme di tutte le proposizioni che costituiscono lo spazio campione), sotto l'ipotesi vincolante che il Power Set fosse esaustivo per la realtà d'interesse considerata. Il pregio di questo modello risiede nella possibilità di individuare il Range operativo a partire da alcune regole notevoli, ricorrendo ad una classe di funzioni parametrizzate. Tuttavia nella sua formulazione, a seconda delle istanze del problema, occorre di volta in volta calcolare il valore che assume il singolo parametro per determinare il Range operativo corrispondente alle regole del sistema.

In questo lavoro, per ovviare a tale problema, si è realizzato un **mapping tra la classe di funzioni parametrizzate ed il valore di un singolo parametro** $\alpha \in [-1 \ 1]$. Inoltre vengono proposte alcune **linee guida per la scelta dei valori di suddetto parametro**, che risulta ancora un problema ampiamente dibattuto in letteratura.

La tesi si articola nei seguenti capitoli:

1. Viene presentato lo stato dell'arte della Teoria di Dempster e Shafer (DST), evidenziando i vantaggi e le difficoltà che riguardano soprattutto la componente dinamica. Inoltre si è posta l'attenzione di fornire una descrizione sistematica di un'argomento che in letteratura viene spesso presentato attraverso notazioni che non risultano standard e che fanno riferimento a diversi papers scientifici.
2. Viene presentata l'implementazione del Modello matematico, analizzando la struttura dati e gli algoritmi di fusione. Inoltre questo capitolo costituisce una buona base teorica per definire algoritmi su Reticoli Booleani (Boolean Lattice) che consentono di modellare relazioni d'ordine parziale tra insiemi.
3. Viene descritto il modello parametrico di Inagaki e la soluzione proposta per la determinazione dei valori da attribuire al parametro, attraverso scenari relativi a varie simulazioni. Viene inoltre proposta un'ulteriore regola per la gestione del conflitto e dell'incertezza, presenti nel sistema.
4. Viene mostrato come il modello di Dempster e Shafer possa essere impiegato nella Robotica Autonoma Mobile e come la scelta del valore di α possa notevolmente influire sulla fase di Updating, condizionando lo Stato di Conoscenza del sistema.

Dall'analisi dei contenuti dei singoli capitoli emerge dunque che questo lavoro ha una duplice funzione:

1. Fornire le nozioni teoriche e gli strumenti necessari per realizzare un sistema di inferenza basato sulla DST, anche per coloro che non appartengono al settore.
2. Fornire gli aspetti metodologici per la progettazione di un DATA FUSION SYSTEM basato su regole.

Indice

Indice	6
Elenco delle figure	10
Elenco delle tabelle	11
1 Il Modello di Dempster and Shafer	12
1.1 Introduzione	12
1.1.1 Tipologie di Prove	18
1.2 Dempster and Shafer Theory of Evidence	22
1.2.1 Principio di Inclusione-Esclusione	28
1.2.2 Lower Bound and Upper Bound	31
1.3 Regole di Combinazione delle Prove	34
1.3.1 Regola di Combinazione di Dempster	36
1.3.2 Le insidie della Regola di Dempster	38
1.4 La Revisione di Yager	39
1.4.1 Operatori Quasi-Associativi	40
1.4.2 Il Framework Quasi-Associativo nella Regola di Dempster	41
1.4.3 Regola di Combinazione di Yager	43
1.5 Closed World and Smets's Open World Hypothesis	45
1.5.1 Unified Combination Rule	47
1.5.2 Inagaki's Extra Rule	51
1.5.3 Parameter K operative Range	52
1.6 Interdependence between Safety-Control Policy and Multiple-Sensor	54
1.6.1 Combination Rule and Safety-Control Policy	57
1.6.2 Fault-Warning Safety-Control Policy	58
1.6.3 Safety-Preservation Safety-Control Policy	61
1.6.4 Esempi Numerici	62
1.6.5 Linee Guida per la Progettazione	68
2 Implementazione della Dempster and Shafer Theory	70
2.1 Introduzione	70
2.1.1 Rappresentazione di sottoinsiemi tramite i bit-arrays	70

2.2	Le Funzioni Belief	73
2.2.1	The Principle of Minimal Commitment	75
2.3	Möbius Transformation	77
2.3.1	Le altre Trasformazioni	82
2.3.2	Matrix Patterns	82
2.4	Fast MöBius Transform	83
2.4.1	Implementazione della FMT	84
2.4.2	FMT e la Regola di combinazione di Dempster	88
2.5	Transferable Belief Model	93
2.5.1	Trasformazioni di bba in altre bba	94
2.5.2	Specializzazioni and Generalizzazioni	95
2.5.3	Revision	97
2.5.4	Dempster's Rule of Conditioning	98
2.5.5	Conjunctive And Disjunctive Rule of Combination	100
2.5.6	Autovalori e Autovettori	100
3	Unified Combination Rule Parameter Design and Simulation Results	102
3.1	Unified Comb-Rule's k-parameter design	102
3.1.1	Ripartizione percentuale della massa del Null Sets	103
3.1.2	α -Tuning parameter mapping	110
3.1.3	k parameter Supreme Value-Filtering Uncertainty	122
3.2	Simulazioni e Risultati	129
3.2.1	Esempio 1: Quando il conflitto risulta significativo	130
3.2.2	Valutazione dell'incertezza e del Conflict Gap	142
3.2.3	Esempi di Distribuzioni Eterogene	155
3.2.4	Linee Guida per la progettazione II	160
4	Fusione Sensoriale della Robotica Autonoma Mobile nella DST	161
4.1	Introduzione	161
4.2	Framework of Sensor Fusion	162
4.2.1	Modello Evidence Grid nella DST	163
4.2.2	Modello del Sensore	164
4.2.3	Gestione delle Specular Reflections	165
4.3	Simulazioni e Risultati	167
4.3.1	Case Study	168
4.3.2	Totale Ignoranza	171
4.3.3	Massimo Conflitto	180
4.3.4	Minimo Conflitto	195
4.3.5	Distribuzione di probabilità uniforme	197
5	Conclusioni e Sviluppi Futuri	204

Appendice

206

Elenco delle figure

1.1	Consonant evidence obtained from multiple sensors	19
1.2	Consistent evidence obtained from multiple sensors	19
1.3	Arbitrary evidence obtained from multiple sensors	20
1.4	Disjoint evidence obtained from multiple sensors	20
1.5	Completa ignoranza	25
1.6	Parziale Conoscenza	26
1.7	Update Conoscenza	27
1.8	Totale Conoscenza	27
1.9	Intervallo di incertezza	31
1.10	Funzione di conflitto	38
1.11	whole set of Combination Rule	53
1.12	Process of Combining Two Belief-Structures	58
1.13	$m(\text{GO:FW})$ e $m(\text{GO:SP})$ less conflict	64
1.14	$m(\text{S})$ $m(\text{U})$ $m(\text{X})$ less conflict	64
1.15	$m(\text{GO:FW})$ e $m(\text{GO:SP})$ high conflict	67
1.16	$m(\text{S})$ $m(\text{U})$ $m(\text{X})$ high conflict	67
2.1	reticolo di $\Omega = \{a, b, b\}$	71
2.2	Möbius Transform bba to implicability function	84
2.3	Möbius Transform bba to Commonality function	86
2.4	Inverse Möbius Transform Commonality function to bba	87
3.1	variazione percentuale $m(\text{A})$	117
3.2	variazione percentuale $m(\text{B})$	117
3.3	variazione percentuale $m(\text{X})$	118
3.4	Area percentuale $m(\text{A})$	120
3.5	Area percentuale $m(\text{B})$	120
3.6	Area percentuale $m(\text{X})$	121
3.7	Andamento Belief A	125
3.8	Andamento Belief B	126
3.9	Andamento $M(\text{A})$ extreme Rule	126
3.10	Andamento $M(\text{B})$ extreme Rule	127

3.11	Andamento $M(X)$ extreme Rule	128
3.12	k sensitive $m(B)$	133
3.13	k sensitive $m(X)$	134
3.14	k low-sensitive $m(B)$	136
3.15	k sampling-size $m(B)$	137
3.16	k intermediate $m(B)$	139
3.17	k sampling-size intermidate $m(B)$	140
3.18	k intermediate 50 % $m(B)$	141
3.19	k sampling-size intermidate 50 % $m(X)$	141
3.20	k -sample size ignorance	144
3.21	andamento masse	145
3.22	Ipotesi A	145
3.23	Ipotesi B	146
3.24	Ipotesi C	146
3.25	Rules Distributions	147
3.26	Rules Distributions 2	149
3.27	Belief and Plausibility- B	149
3.28	Belief and Plausibility- C	150
3.29	Rules Distributions 3	153
3.30	es-3 Belief and Plausibility- B	153
3.31	es-3 Belief and Plausibility- C	154
3.32	es-3 Belief and Plausibility- A	154
3.33	Rules Distributions 4	158
3.34	es-3 Belief and Plausibility- B	158
3.35	es-3 Belief and Plausibility- A	159
3.36	es-3 Belief and Plausibility- C	159
4.1	Specular Reflection	162
4.2	The profile of the ultrasonic sensor model	165
4.3	The Range Confidence Factor $R_{\max=6.5\text{ m}}$	167
4.4	Sensor Data Acquisition $m(A)$	169
4.5	Sensor Data Acquisition $m(X)$	170
4.6	Sensor belief(A) vs pl(A)	170
4.7	Sensor belief(B) vs pl(B)	171
4.8	Conflict-vs-Ignorance	172
4.9	Weight of Conflict	172
4.10	Normalization k dynamic	173
4.11	Bel(A) Vs bel(A)-sensor $k=0$	174
4.12	pl(B) Vs pl(B)-sensor $k=0$	174
4.13	$m(A)$ Vs $m(A)$-sensor $k=0$	175
4.14	$m(X)$ Vs $m(X)$-sensor $k=0$	176

4.15	$m(X)$ -Smets Vs $m(X)$ - $k=0$	177
4.16	k dynamic values Dempster	177
4.17	k dynamic values -1.4 kI	178
4.18	k dynamic values -1.8 kI	179
4.19	k dynamic values -1.99 kI	179
4.20	k dynamic values -1.999 kI	180
4.21	Conflict-vs-Ignorance-2	181
4.22	Weight of conflict-2	181
4.23	Belief(A) and $Bel(A)S-2$	182
4.24	$Pl(B)$ and $Pl(B)S-2$	183
4.25	$m(X)$ -Yager's Rule	183
4.26	uncertainty gap	184
4.27	uncertainty gap- k normalization	184
4.28	Dempster-Conflict	185
4.29	mass-Conflict	186
4.30	weight of evidence-3	186
4.31	final normalization constant	187
4.32	bad normalization constant	187
4.33	normalization constant $k=0.5$ kD	188
4.34	weight of conflict $k=0.5$ kD	189
4.35	belief(A) $k=0.5$ kD	189
4.36	$pl(B)$ $k=0.5$ kD	190
4.37	normalization constant $k=0.9$ kD	190
4.38	weight of conflict $k=0.9$ kD	191
4.39	belief(A) $k=0.9$ kD	191
4.40	$pl(B)$ $k=0.9$ kD	192
4.41	normalization constant sensitive	193
4.42	weight of conflict sensitive	193
4.43	belief(A) sensitive	194
4.44	$pl(B)$ sensitive	194
4.45	no-conflict $bel(A)$	195
4.46	no-conflict $pl(B)$	196
4.47	no-conflict wofc	196
4.48	normalization constant-no conflict	197
4.49	uniform-mass $bel(A)$	198
4.50	uniform-mass $pl(B)$	198
4.51	$m(X)$ uniform-distribution	199
4.52	normalization constant-uniform	199
4.53	weight of conflict Yager-uniform	200
4.54	uniform-mass $bel(A)$	201
4.55	uniform-mass $pl(B)$	201

4.56 $m(X)$ uniform-distribution	202
4.57 normalization constant-uniform	202
4.58 weight of conflict Dempster-uniform	203

Elenco delle tabelle

2.1	Order of the elements of the vectors $\mathbf{m}, \mathbf{bel}, \mathbf{pl}$ in $\Omega = \{a, b, b\}$	71
2.2	Matrix BfrM with $\Omega = \{a\}$	78
2.3	Matrix BfrM with $\Omega = \{a, b\}$	78
2.4	Matrix BfrM with $\Omega = \{a, b, c\}$	79
2.5	Matrix MfrB with $\Omega = \{a, b\}$	80
2.6	Matrix QfrM with $\Omega = \{a, b\}$	80
2.7	Conjunctive Combination Rule $ \Omega = 2$	89
2.8	Conjunctive Combination Rule Conflict $ \Omega = 2$	89
2.9	Disjunctive Combination Rule $ \Omega = 2$	92

Capitolo 1

Il Modello di Dempster and Shafer

God does not play dice with the Universe.

- Albert Einstein.

Not only does God play dice, but sometimes he throws the dice where we can't see them.

- Stephen Hawking.

1.1 Introduzione

Solo ultimamente la comunità scientifica ed ingegneristica ha iniziato a riconoscere l'utilità di definire **Tipologie di Incertezza**. In parte, gli sviluppi che hanno consentito un'applicazione concreta di questi studi, è stata resa possibile dalla crescente potenza di calcolo messa a disposizione dagli odierni computer. In particolare tale progresso tecnologico ha consentito di mettere in luce *le forti limitazioni che comporta l'utilizzo della classica teoria della probabilità per rappresentare l'incertezza soggettiva di un dato sistema*.

Questo aspetto è legato principalmente alla duplice natura che caratterizza *l'incertezza*:

1. **Incertezza Aleatoria**- legata al fatto che un sistema può presentare comportamenti casuali. Dei sinonimi analoghi che descrivono questa tipologia di incertezza, sono: Incertezza Irriducibile, Incertezza Oggettiva.
2. **Incertezza Epistemica**- che riguarda il grado di conoscenza relativo ad un dato sistema. Questa tipologia di incertezza emerge soprattutto quando si ha una scarsa conoscenza del sistema ed è una proprietà che deve essere caratterizzata (mediante un'opportuno modello matematico) dalla scelta soggettiva dell'analista. Per tale motivo è nota in letteratura anche come Incertezza soggettiva, Incertezza Riducibile, Stato di Conoscenza o Ignoranza.

Da questa distinzione generale è possibile definire due categorie di Probabilità:

La prima è legata alla **VARIABILITA'** che scaturisce da un processo Stocastico; Ovvero un fenomeno descritto da leggi non deterministiche, governate dal caso o in termini più generali dalla sorte; nel quale la sola conoscenza delle condizioni iniziali non consente di stabilire la precisa evoluzione temporale del processo o comunque del comportamento del sistema. Quindi, anche se si potesse idealmente ricostruire le stesse condizioni

operative, l'esperimento darebbe luogo a risultati differenti; pertanto risulta logico considerare mediamente il comportamento del sistema su un numero sufficiente di prove, piuttosto che analizzare il singolo esperimento. In generale, tale comportamento può essere provocato dalla non omogeneità delle caratteristiche del fenomeno, quali ad esempio: fluttuazioni temporali o spaziali delle variabili in gioco, eterogeneità oppure altre differenze tra i componenti che costituiscono il sistema. Tale Variabilità, qualche volta chiamata incertezza di TYPE I, oppure in modo meno criptico incertezza Aleatoria (in modo da enfatizzare la relazione che si ha con la casualità presente nel gioco d'azzardo) spesso è chiamata anche incertezza IRRIDUCIBILE, poichè in linea di principio non può essere ulteriormente ridotta attraverso successivi studi empirici; sebbene possa essere caratterizzata maggiormente. Infatti la Probabilità Aleatoria è descritta da un'insieme di numeri, (i quali vengono assegnati sulla base dei risultati ottenuti su un numero sufficientemente elevato di prove ottenute da un particolare esperimento) che definiscono la possibilità che si verifichi un evento. Quindi la probabilità aleatoria (alea = dado, comunemente detta chance) di ciascun risultato può essere considerata come una MISURA DELLA PROPENSIONE (TENDENZA) CHE UN PARTICOLARE RISULTATO SI POSSA MANIFESTARE, considerando approssimativamente LA FREQUENZA con la quale tale risultato si presenta una volta che si sono osservate OGGETTIVAMENTE un numero particolarmente elevato di prove. Questo approccio di tipo frequentistico si basa in sostanza sulla *legge dei grandi numeri* di Bernoulli nata nel gioco d'azzardo. Questo teorema dice in pratica che: se non è nota a priori la propensione che una particolare evento possa accadere, allora può essere determinata a posteriori osservando le frequenze.

Sulla sponda diametralmente opposta abbiamo una probabilità di natura Epistemica, che è legata al Dubbio o all'Indecisione che nasce dall' IGNORANZA scientifica, Incertezza delle Misure, NON OSSERVABILITA' del fenomeno, dalle differenti Opinioni, Ipotesi o Giudizi, fondati su indizi o apparenze o più in generale da forme che riflettono la SCARSA CONOSCENZA dello stato del sistema. Questa viene spesso indicata come incertezza di TYPE II, o incertezza Epistemica (ovvero legata alla conoscenza del sistema). In contrapposizione a quella aleatoria, l'Epistemica è anche detta incertezza RIDUCIBILE, poichè in linea di principio può essere in generale ridotta con un maggiore sforzo che fornisca ulteriori prove empiriche. Pertanto, descrive la CONOSCENZA SOGGETTIVA del sistema. E' un numero che riflette, sebbene spesso con un approssimazione piuttosto lasca, il grado di confidenza che qualcosa sia certo, o se preferiamo il livello di credenza (belief)(percezione soggettiva in relazione a delle personali prove che avvalorano una certa ipotesi) di un particolare fatto. Da questa interpretazione emerge che la probabilità epistemica non può essere caratterizzata da un'analisi frequentistica. Infatti quando qualificiamo un fenomeno con il termine casuale, stiamo in sostanza dicendo che è governato da leggi casuali legate alla natura aleatoria del processo. Mentre la probabilità epistemica è una probabilità valutata a Priori.

Ci sono situazioni, come nella fisica oppure nella genetica, in cui la base teorica ci fornisce (attraverso opportune ipotesi o congetture di partenza) le probabilità da attribuire agli eventi. Tuttavia occorre prendere tali risultati con la dovuta attenzione, in quanto è necessario verificare sul campo in modo empirico la validità dei dati a nostra disposizione osservando appunto le frequenze. In generale però non sempre si ha la possibilità di avere a disposizione l'informazione relativa alla probabilità di tutti i singoli eventi che caratterizzano il nostro sistema o per lo meno non abbiamo un livello accettabile di tolleranza riguardo la precisione di tali risultati. Quando questa non è disponibile, il calcolo delle probabilità si appella al Principio di Ragione Insufficiente di Laplace, il quale semplifica il problema adottando una distribuzione uniforme. Quindi sostanzialmente, per tutti gli eventi possibili del nostro spazio campione (per i quali non è nota la funzione di distribuzione di probabilità),

viene attribuita la stessa probabilità di accadimento. Pertanto, la totale ignoranza si riflette nel considerare gli eventi equiprobabili.

Quindi la probabilità come grado di fiducia può essere considerata come quella sensazione che ci rende più o meno fiduciosi o dubbiosi o scettici circa la verità di un'asserzione, il successo di un'impresa, l'accadere di uno specifico evento, e ci guida, consciamente o no, in tutte le nostre azioni e decisioni. Si ha quindi la necessità di regolare i propri comportamenti facendo congetture su fatti possibili e valutandone (talvolta anche intuitivamente o inconsciamente) la probabilità come MISURA DEL GRADO DI FIDUCIA nel loro verificarsi.

Per esempio, nella *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*, pubblicata a Ginevra nel 1993 e contenente le raccomandazioni del *Comitè International des Poids et Mesures* sul modo di esprimere le incertezze sperimentali, si afferma: *In contrasto con il punto di vista della probabilità basato sulla frequenza, un punto di vista ugualmente valido è quello che sostiene che la probabilità è una misura del grado di fiducia nel verificarsi di un evento A. Per esempio, il grado di fiducia in A è 0.5 se un individuo ritiene indifferente la scelta fra: (1) ricevere una somma S se A si verifica e niente se A non si verifica; (2) ricevere S se A non si verifica e niente se A si verifica.*

NB: In questo contesto, quando facciamo riferimento al termine Calcolo delle Probabilità, intendiamo quel ramo della Matematica che studia i differenti tipi di incertezza attraverso lo studio delle funzioni insiemistiche e delle loro proprietà algebriche. In particolare il modello classico che viene adottato è quello Bayesiano definito nel seguente modo:

Le funzioni Insiemistiche \mathbf{P} sono definite su una Algebra di sottoinsiemi di un insieme Θ (insieme Universale), le quali devono rispettare i seguenti Assiomi:

1. $P(\emptyset) = 0$
2. $0 \leq P(A) \leq 1$, $A \subseteq \Theta$
3. $P(\Theta) = 1$
4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, se $A \cap B = \emptyset$. (ovvero gli insiemi sono disgiunti o in termini probabilistici gli eventi sono indipendenti). Addittività

A partire da questi semplici assiomi è possibile dedurre numerosi teoremi, utili per l'inferenza statistica. A questo punto risulta naturale domandarsi per quale ragione questo modello risulta insufficiente in determinate circostanze.

Si consideri ad esempio la presenza di un guasto all'interno di un sistema dove abbiamo tre potenziali cause che possono averlo determinato (Componente A,B,C). Secondo l'opinione di un'esperto la probabilità che il guasto sia dovuto al componente A è del 0.3, tuttavia non è in grado di pronunciarsi sulle altre due potenziali cause di danneggiamento. Seguendo un'analisi improntata sul calcolo probabilistico, secondo il principio di ragione insufficiente si dovrebbe assegnare rispettivamente al componente B ed al componente C il valore 0.35. Si osserva, che questo costituirebbe un'affermazione ben precisa riguardo la probabilità di guasto degli altri due componenti del sistema in contrapposizione all'effettiva ignoranza del nostro tecnico. (Infatti nell'affermare che il 0.7 si equidistribuisce tra i rimanenti candidati implica da un'angolazione di natura frequentistica, che 35 volte su 100 può accadere A oppure B, considerando A e B indipendenti; e questo risulta chiaramente differente nel rispecchiare la propria totale ignoranza. In base a cosa stabilisco l'esistenza di questo equilibrio? Chi me lo dice? - Mi sto pronunciando a Priori su qualcosa che non ho verificato oggettivamente!)

Inoltre secondo il calcolo delle probabilità deve essere verificato l'Assioma di Additività tra eventi indipendenti. Questo assioma è in parte giustificato, se vogliamo dal legame che tali probabilità hanno con le frequenze. Se Θ è l'insieme di tutti i possibili risultati che può dar luogo un certo esperimento e siano A e B due sottoinsiemi disgiunti di Θ , allora la frequenza con la quale il risultato dell'evento ricada in $A \cup B$ è necessariamente la somma della frequenza con la quale ricade in A e della frequenza con la quale ricade in B . E poichè queste frequenze, quando si considerano un numero sufficientemente alto di prove, approssima $P(A \cup B)$ segue sperimentalmente l'assioma. (Da un punto di vista logico $A \cup B$ significa che accade A oppure B). Da questo risulta chiaro che se consideriamo la somma di tutti gli eventi indipendenti del nostro spazio campione, la somma delle loro probabilità deve essere pari ad 1. Questo assioma ci obbliga a giungere alla conclusione che la conoscenza che si verifichi un particolare evento comporta necessariamente la conoscenza che si verifichi il suo complemento. O detto in altri termini è nota la probabilità che tale evento non accada.

Quindi, se un'esperto sostiene che il malfunzionamento del sistema possa essere dovuto ad un particolare componente con una probabilità del 0.3; possiamo necessariamente dire che l'esperto crede che sia possibile escludere tale causa con il 0.7 ?

Questa è la principale sfida che occorre affrontare quando si desidera rappresentare qualsiasi tipo di incertezza associata alla convinzione soggettiva di una sorgente d'informazione.

Quindi se da una parte, l'assioma di Additività ed il Principio di Ragione Insufficiente, possono essere appropriati per modellare eventi casuali associati ad una incertezza di natura aleatoria in cui gli eventi sono indipendenti (Vedi esempio classico del lancio del dado), questi vincoli sulla formulazione matematica del modello risultano abbastanza discutibili quando vengono utilizzati per descrivere la conoscenza del sistema o la credibilità soggettiva di un dato evento. Pertanto, in situazioni in cui non si ha una visione ben definita della struttura del problema, ovvero non siamo in grado di caratterizzare alcuni elementi che lo compongono (soprattutto se risulta difficile attribuire le probabilità a degli eventi sui quali non sappiamo nulla riguardo la loro eventuale indipendenza), ci si pone di fronte al dilemma di proporre un modello alternativo per gestire tale incertezza. Di conseguenza diversi matematici hanno indagato sulla possibilità di formulare dei modelli che consentissero di rappresentare a livello generale l'incertezza ed in particolare che fossero in grado di cogliere l'essenza della natura epistemica di particolari situazioni. Come ad esempio:

- Quando non si hanno dati sufficienti per valutare la probabilità di accadimento di un dato evento. Sia per la mancanza di tempo e sia a volte per l'impossibilità di condurre le prove.
- Oppure quando l'informazione che si ha disposizione risulta ambigua, frammentaria, non specifica o addirittura presenta delle contraddizioni.

Tipici esempi in cui si presentano tali circostanze sono nell'analisi del Rischio, dove non è possibile caratterizzare l'incertezza con una misura precisa come quella di attribuire una probabilità ben definita. Un'altro esempio è il principio di indeterminazione di W. Heisenberg, che cambia completamente il ruolo della probabilità nella fisica, il quale rappresenta un punto essenziale nella frattura fra fisica classica (newtoniana) e fisica moderna: nella fisica classica (macroscopica) la probabilità compare con ruolo marginale, come teoria degli errori, mentre nella fisica moderna la probabilità fa parte della definizione di stato di un sistema. Il probabilismo della fisica moderna sottolinea la limitatezza della conoscenza umana: *L'uomo non conosce mai un fenomeno in modo completo, ma solo limitatamente alla parte recepita dai suoi mezzi di indagine ed esprimibile col suo linguaggio.*

Allora potrebbe essere ragionevole considerare la MISURA DELLA PROBABILITA' non più con uno specifico valore, ma come UN'INTERVALLO O INSIEME DI VALORI. Questo approccio ha 3 importanti conseguenze:

1. Non è più necessario dedurre una misura precisa di un particolare evento richiedendo l'aiuto di un'esperto oppure verificandola sperimentalmente. Soprattutto se tali requisiti non sono fattibili.
2. Il principio di ragione insufficiente non è vincolante. In caso di totale ignoranza, è possibile pronunciarsi sulla possibilità che si verifichino più eventi insieme senza preoccuparsi della probabilità dei singoli eventi che costituiscono tale insieme. Un conto è dire che tutti gli eventi sono equiprobabili ed un conto è dire di non sapere nulla sulla possibilità che si verifichino. In un certo senso è come asserire che la verità risiede in un certo intervallo di confidenza, senza ovviamente pronunciarsi sul suo valore preciso. Ad esempio possiamo dire che un'evento possa accadere tra il 50 % e 80 % dei casi, piuttosto che sbilanciarci su una percentuale precisa. Questo ci consente di avere un livello di astrazione maggiore legato se vogliamo, ad una sorta di redistribuzione delle possibili probabilità da attribuire agli eventi del nostro sistema. Risulta chiaro che in tale circostanza il dualismo tra le frequenze e le probabilità perde di significato, o se vogliamo essere più precisi deve essere interpretato sotto una nuova luce, che come vedremo dipenderà dal modello adottato per rappresentare questo intervallo.
3. In fine, non deve essere necessariamente rispettato l'assioma di addittività. La somma di tutte le misure può risultare diversa da 1. Nel caso in cui corrisponda effettivamente ad 1 ci troviamo nella situazione tradizionale del calcolo delle probabilità, che si riflette in un certo senso all'indipendenza degli eventi considerati (ogni sorgente contribuisce con un'informazione nuova sul sistema che risulta indipendente dalle altre), dove abbiamo un'algebra ADDITIVA. Quando risulta minore di 1, caso SUB-ADDITIVO, questo è un sintomo di incompatibilità tra varie sorgenti di informazione (Più sensori che danno informazioni in conflitto tra di loro). In fine se è maggiore di 1, SUPER-ADDITIVA, significa che la nostra informazione viene confermata da più sorgenti. (Più sensori che forniscono la stessa informazione). Risulta quindi interessante, constatare che il calcolo delle probabilità possa essere considerato un caso particolare di quello che è definito in letteratura come Interval-Based Probability Measure, in cui effettivamente il nostro intervallo di confidenza collassa in un Singleton (Certezza precisa relativa alla probabilità di accadimento del singolo evento).

In questa cornice è possibile individuare 3 approcci generali che costituiscono la base a partire dalla quale sono state in seguito elaborati i diversi modelli per rappresentare L'INCERTEZZA COME UN'INTERVALLO DI VALORI.

- Imprecise Probabilities
- Possibility theory
- Dempster-Shafer Theory of Evidence.

Questo scenario pone naturalmente l'analista a porsi la seguente domanda:

Quali tra questi metodi può ritenersi maggiormente valido per una data situazione?

In questo lavoro viene affrontato lo studio dell'incertezza adottando la teoria di Dempster e Shafer ed in particolare si affronterà il problema di combinare l'informazione proveniente da più sorgenti. Il motivo per cui si è preferito tale approccio piuttosto che un'altro è legato alle seguenti ragioni:

1. La relazione che ha con la Classica Teoria della Probabilità e la Teoria degli Insiemi. Questo vedremo, ci consentirà di costruire un modello matematico elegante che sfrutta congiuntamente le proprietà del calcolo delle probabilità e della teoria degli insiemi.
2. Il gran numero di esempi ed applicazioni nel campo ingegneristico.
3. Risulta particolarmente adatto per rappresentare e mettere insieme più informazioni di diverse prove provenienti da varie sorgenti.

Nei paragrafi seguenti mostreremo come la DST (Dempster-Shafer-Theory) sia una generalizzazione della Probabilità Bayesiana; in cui l'utilizzo della funzione Belief (piuttosto che la probabilità) consente una maggiore flessibilità per rappresentare situazioni di incertezza. La misura della Belief, a differenza dell'approccio Bayesiano (dove si assegnano i pesi dell'evidenza delle prove rispettivamente al singolo evento ed al suo complemento), consente di rappresentare stati ulteriori che possono essere vaghi, indefiniti o utilizzando un termine fuzzy diciamo sfumati. Per avere un'idea qualitativa di questa maggiore libertà nel caratterizzare l'incertezza del mio sistema, si consideri il seguente esempio:

Esempio: Un sensore identifica un particolare oggetto come un'aereo. L'attendibilità relativa alla precisione della misura del sensore è del 95%. Secondo l'interpretazione data dalla probabilità Bayesiana, il sensore sta implicitamente affermando che c'è un 5% di possibilità che tale oggetto non sia un'aereo. Con la DST invece il 95% costituisce la nostra belief ed il rimanente 5% può essere assegnato arbitrariamente ad un qualsiasi altro stato del sistema. Ad esempio, un'altro tipo di oggetto (jet, nave, carrarmato,...) oppure ad uno stato Sconosciuto che appunto rispecchia la nostra totale Ignoranza.

Inoltre la prova non è limitata ad un singolo evento come quella Bayesiana: Nel caso in cui nuove prove riducano le ipotesi di partenza, la probabilità Bayesiana invoca il Principio di Ragione Insufficiente, assegnando lo stesso peso ai rimanenti elementi dell'insieme delle ipotesi. Al contrario Shafer sostiene che tale principio non rappresenta il nostro grado di conoscenza del sistema. Con questo non dice che la probabilità Bayesiana restituisca un risultato incerto. Può capitare che effettivamente gli altri elementi siano oggettivamente equiprobabili; tuttavia il punto fondamentale che vuole sottolineare è la possibilità di rappresentare **ESPLICITAMENTE UNA MISURA DELL'INCERTEZZA**. (ovvero la possibilità di non pronunciarsi direttamente sugli altri elementi dell'insieme in modo da non commettere errori di giudizio o valutazione di opportune prove). Questo Calcolo richiede naturalmente che esista uno stato sconosciuto per il nostro sistema. Quindi uno dei punti di forza della DST, non è tanto la capacità di rappresentare la parte statica della Belief (ovvero il nostro Stato di Conoscenza corrente del sistema) ma l'abilità di gestire la componente **DINAMICA**, ovvero spiega come aggiornare il nostro grado di conoscenza a partire dalle nuove informazioni sul sistema. In particolare, in questo lavoro studieremo come nel Framework della DST vengano differenziati i diversi modelli proposti a partire appunto dalla UPDATE della Belief. Si consideri l'esempio precedente:

Esempio: Supponiamo che le nostre ipotesi di partenza, relative all'identificazione di un'oggetto siano : $\Theta = \{Carrarmato, Aereo, Stato_sconosciuto = oggetto_non_identificabile\}$. Il sensore rileva che l'oggetto in movimento è veloce con una precisione del 60%. Secondo la teoria Bayesiana questa prova implicherebbe che la possibilità che l'oggetto sia un'aereo è del 60%, mentre il restante 40% sarebbe equidistribuito tra gli altri due stati del sistema, indipendentemente dal fatto che non vi siano prove a sostegno di tale assunzione. Mentre, utilizzando la DST, il risultante 40% può essere assegnato allo Stato sconosciuto (che non esclude la possibilità

che l'oggetto in questione risulti un'aereo al 100%), dato che non abbiamo prove che possano sostenere il contrario (ovvero un'altro stato particolare).

1.1.1 Tipologie di Prove

Esistono due principali problemi legati tra loro che riguardano la combinazione di prove ottenute da più sorgenti di informazione:

1. Il primo riguarda la Tipologia di prova (risultato/i di uno o più esperimenti) sostenuta da una o più sorgenti.
2. Il secondo problema, strettamente legato al primo, riguarda il modo di gestire tipi di prove che risultano in conflitto tra loro.

A tale riguardo affrontiamo il primo problema. Nel nostro studio possiamo classificare le prove effettuate in 4 grandi tipologie, che sono rispettivamente:

- **Consonant Evidence**
- **Consistent Evidence**
- **Arbitrary Evidence**
- **Disjoint Evidence**

Consonant Evidence: Come suggerisce la parola stessa (Consonant) abbiamo una serie di risultati che sono conformi tra loro. Essa viene rappresentata con una struttura nidificata di sottoinsiemi dove, gli elementi dell'insieme più piccolo sono contenuti nell'insieme che risulta immediatamente più grande, il quale a sua volta è contenuto in un'altro insieme che ha una cardinalità maggiore e così via. Questo può corrispondere ad una situazione in cui l'informazione si accumula nel tempo e restringe progressivamente o circonda la grandezza dell'insieme delle prove evidenti.

Si consideri ad esempio l'identificazione di un bersaglio. Si immagini di avere 5 sensori con vari gradi di risoluzione:

- **Sensore 1:** Rileva 1 bersaglio in prossimità di A.
- **Sensore 2:** Rileva 2 bersagli: uno in prossimità di A ed uno in prossimità di B.
- **Sensore 3:** Rileva 3 bersagli: uno in prossimità di A, un'altro di B ed in fine l'ultimo in C.
- **Sensore 4:** Rileva 4 bersagli: A,B,C e D.
- **Sensore 5:** Rileva 5 bersagli: A,B,C,D,E.

I diagrammi di Veen sono riportati in Figura 1.1

Consistent Evidence: Significa che almeno un elemento risulta in comune a tutti i sottoinsiemi. Riprendendo l'esempio precedente, possiamo presentare questa circostanza nel modo seguente:

- **Sensore 1:** Rileva 1 bersaglio A.

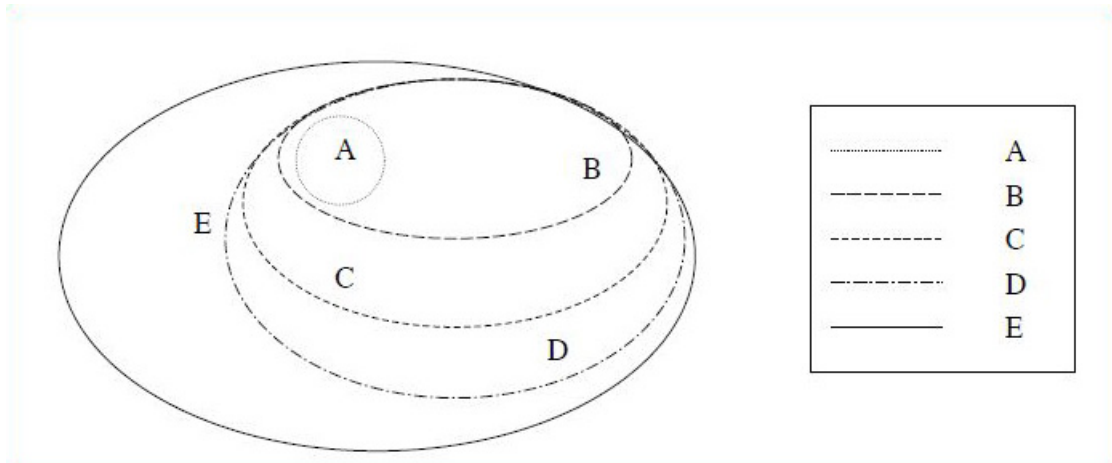


Figura 1.1: Consonant evidence obtained from multiple sensors

- **Sensore 2:** Rileva 2 bersagli: A,B.
- **Sensore 3:** Rileva 2 bersagli: A,C.
- **Sensore 4:** Rileva 3 bersagli: A,B,D.
- **Sensore 5:** Rileva 4 bersagli: A,B,C,E.

I diagrammi di Veen sono riportati in Figura 1.2 che riflette la configurazione del sistema.

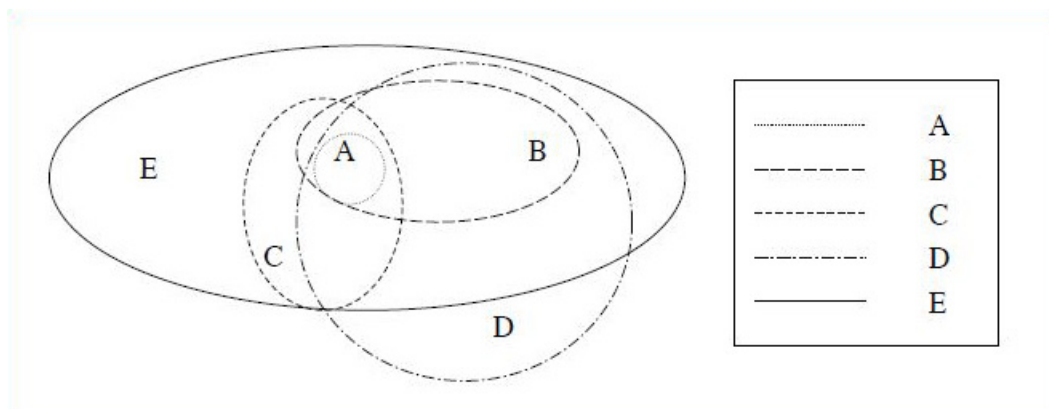


Figura 1.2: Consistent evidence obtained from multiple sensors

Arbitrary Evidence: E' la situazione in cui nessun elemento risulta in comune a tutti i sottoinsiemi considerati, sebbene alcuni di essi possono averne alcuni in comune e quindi presentare una delle possibili configurazioni precedenti. Riprendendo ancora una volta l'esempio di identificazione del target, possiamo presentare una possibile configurazione che rifletta la natura arbitraria delle prove.

- **Sensore 1:** Rileva 1 bersaglio A.
- **Sensore 2:** Rileva 2 bersagli: A,B.
- **Sensore 3:** Rileva 2 bersagli: A,C.

- **Sensore 4:** Rileva 2 bersagli: C,D.
- **Sensore 5:** Rileva 2 bersagli: C,E.

I diagrammi di Veen sono riportati in Figura 1.3

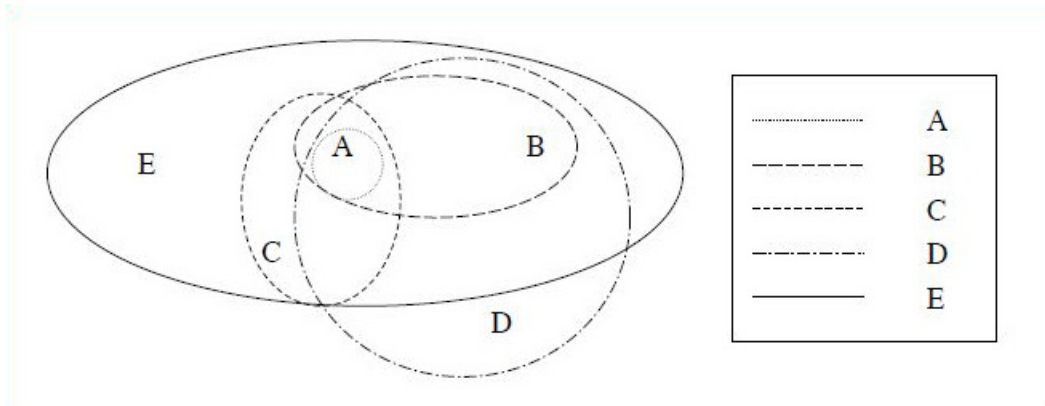


Figura 1.3: Arbitrary evidence obtained from multiple sensors

Disjoint Evidence: La parola 'Disjoint' si riferisce alla situazione in cui effettivamente i vari sottoinsiemi non presentano elementi in comune con nessuno degli altri sottoinsiemi.

- **Sensore 1:** Rileva 1 bersaglio A.
- **Sensore 2:** Rileva 1 bersaglio: B.
- **Sensore 3:** Rileva 1 bersaglio: C.
- **Sensore 4:** Rileva 1 bersaglio: D.
- **Sensore 5:** Rileva 1 bersaglio: E.

I diagrammi di Veen sono riportati in Figura 1.4

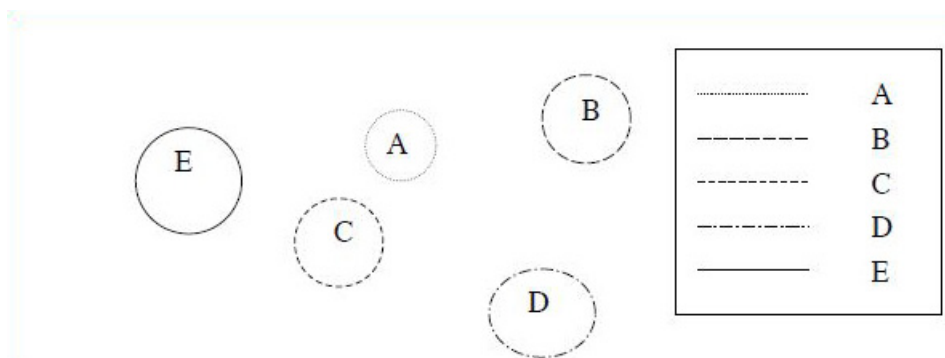


Figura 1.4: Disjoint evidence obtained from multiple sensors

Per ciascuna di queste possibili configurazioni di prove possiamo dedurre qualitativamente e quantitativamente il livello di conflitto tra le diverse sorgenti presenti nel nostro sistema. (Ovvero possiamo classificare qualitativamente la natura delle prove di una generica situazione valutando la sua corrispondente configurazione.) In particolare si osserva che:

- **Disjoint Evidence:** In questa circostanza tutte le sorgenti forniscono delle prove che sostengono risultati completamente differenti tra di loro. Infatti ognuno sostiene che il bersaglio da colpire si presenta in zone differenti e questo comportamento complessivo si traduce in una situazione di totale conflitto. In sostanza chi ha ragione?
- **Arbitrary Evidence:** In questo caso c'è una situazione di comune accordo tra alcune sorgenti del nostro sistema ma non c'è un consenso generale su un particolare elemento. Nel caso in esame si osserva che S_1 e S_2 risultano d'accordo sull'eventualità che il nemico si trovi in prossimità di A. Mentre S_3 , oltre a condividere la prova di S_1 e S_2 relative alla presenza del nemico nella zona A, sostiene anche le prove dei sensori S_4 e S_5 relative alla presenza del nemico nella zona C. Dallo schema inoltre si evince che non possiamo pronunciarsi su B,E e D. Comunque non possiamo trarre alcuna conclusione generale su un particolare elemento dell'insieme.
- **Consistent Evidence:** Riflette un comune accordo su un insieme di prove o almeno una singola prova. Nel caso in esame c'è un comune accordo sull'eventualità che un nemico possa celarsi nella zona A.
- **Consonant Evidence:** In questa ultima situazione c'è una coerenza sulle misure ottenute dai sensori del sistema, va sottolineato però che questa coerenza è diversa dal caso precedente perchè la struttura nidificata degli insiemi, oltre a confermare le prove dell'insieme che ha cardinalità minore mette in luce una crescente contraddizione che si manifesta tra l'insieme più grande e quello più piccolo che può essere interpretata in diversi modi in relazione alla natura del fenomeno osservato (come ad esempio la presenza di rumore).

Quindi la Classica Teoria delle Probabilità non è in grado di gestire queste tipologie di incertezza, se non facendo delle ulteriori ipotesi preliminari riguardo le funzione di distribuzione delle probabilità all'interno dell'insieme; inoltre non è possibile esprimere il livello di conflitto tra gli insiemi di prove evidenti del nostro sistema. Questo problema si può presentare anche nella situazione in cui si abbia un'unico sensore che faccia una campagna di misure in uno specifico intervallo temporale; in quel caso le misure non possono essere considerate indipendenti tra loro ed inoltre le possibili contraddizioni che possono nascere in seguito al guasto del sensore oppure alla presenza di eventuale rumore sul canale sono difficilmente individuabili.

Quindi se la natura del problema che stiamo affrontando presenta dei comportamenti da parte del sistema che richiedono un'ulteriore modellazione dell'incertezza allora un possibile modo per affrontare tale difficoltà è quello di ricorrere al framework adottato dalla Teoria di Dempster e Shafer (Nota in letteratura come Dempster and Shafer Theory of Evidence). La sua struttura di base, a partire dalla quale viene successivamente definito il modello matematico, consente di gestire le differenti tipologie di prove a partire dalla nozione di Probabilità non più legata ad un singolo elemento di un'insieme ma a più insiemi. Vorrei inoltre sottolineare come sia possibile caratterizzare ulteriormente una configurazione scegliendo di partizionarla in più sottoinsiemi ognuno dei quali può a sua volta essere classificato con configurazioni diverse. Naturalmente questa ulteriore scomposizione è

una scelta soggettiva dell'analista che magari desidera mettere in evidenza alcune caratteristiche del sistema piuttosto che altre. Nell'esempio più volte ripreso si può constatare che l'Arbitrary Evidence può essere a sua volta suddiviso in due sottogruppi di insiemi che tengono conto rispettivamente del contributo congiunto del primo e secondo sensore ed il contributo congiunto dei rimanenti. In questa circostanza si osserva che uno presenta una configurazione di tipo Consonant Evidence, mentre l'altra Consistent Evidence. Ovviamente la situazione più complessa da gestire è quella in cui la contraddizione è massima, ovvero Disjoint Evidence, la quale può essere trattata in diversi modi dalla DST (Dempster Shafer Theory).

1.2 Dempster and Shafer Theory of Evidence

La DST, è un modello matematico che consente di descrivere il comportamento di un sistema a partire dalle prove fornite dalle differenti sorgenti di informazione.

Nel caso di uno Spazio Campione Finito e Discreto, la DST può essere interpretata come una generalizzazione della classica teoria della Probabilità; nella quale però le Probabilità VENGONO ASSEGNATE AGLI INSIEMI E NON AI SINGOLI EVENTI INDIPENDENTI TRA LORO. Infatti nella classica teoria delle Probabilità una prova viene associata alla probabilità di un singolo evento. Nella DST le prove di un sistema possono essere associate a più di un possibile evento, ovvero insieme di eventi. Quindi possiamo affermare che tale modello si presta piuttosto bene a caratterizzare l'informazione del sistema ad un livello di astrazione maggiore, senza fare alcuna ipotesi o se preferiamo, senza pronunciarsi sui singoli eventi che caratterizzano il nostro insieme di prove. Quando le prove evidenti a nostra disposizione sono in numero sufficiente da permettere un'assegnazione delle probabilità ai singoli eventi, allora la DST collassa nella classica teoria probabilistica.

Inoltre, come è stato più volte sottolineato in precedenza, una delle principali caratteristiche della DST è che il modello a partire dal quale viene impostata la progettazione, si presta piuttosto bene a coprire con vari livelli di precisione l'informazione del sistema senza richiedere ulteriori condizioni relative alla scarsa conoscenza su particolari eventi. Altro aspetto importante, soprattutto per la parte controllistica, è quella di poter rappresentare direttamente le risposte di un sistema in una situazione d'incertezza, la cui natura è legata ad esempio ad un'ingresso indefinito che può essere caratterizzato da un'insieme di valori oppure un'intervallo continuo e la risultante uscita anch'essa costituita da un'insieme o intervallo di valori.

A questo punto occorre passare dalle chiacchiere ai fatti. Come è possibile caratterizzare un'intervallo di Probabilità utilizzando la DST ?

La DST propone **3 Funzioni importanti**:

1. *Basic Probability assignment (bpa)(m)*.
2. *Belief (Bel)*.
3. *Plausibility (Pl)*.

Basic Probability assignment (bpa)(m): E' la funzione di base da cui parte la caratterizzazione dell'incertezza del nostro sistema. Occorre fare attenzione all'interpretazione che viene attribuita al termine 'Basic Probability assignment', la quale non fa riferimento alla classica assegnazione delle probabilità, ma definisce una corrispondenza tra il *power set*, ovvero l'insieme delle parti, e l'intervallo dei numeri reali compreso tra $[0, 1]$, nella quale la bpa, indicata con la lettera *m*, assume il valore 0 in corrispondenza dell'insieme vuoto \emptyset

e la somma delle *bpa* di tutti i sottoinsiemi dell'insieme delle parti deve risultare pari ad 1. In altre parole la verità risiede da qualche parte all'interno del power set, ed il modo in cui ridistribuisco la massa tra i diversi componenti riflette la conoscenza del sistema. E' come se nel Power Set ci fosse una quantità di massa costante (che non si crea e non si distrugge, una conservazione della massa) e noi la possiamo allocare in modo differente sui vari elementi del Power Set, ovviamente rispettando il vincolo che la somma complessiva risulti sempre pari ad uno. Inoltre abbiamo un'altra caratteristica di m , ovvero $m(\emptyset) = 0$, in generale non è sempre richiesta e vedremo più avanti che il fatto di assegnare la massa all'insieme vuoto assume un'importante interpretazione.

NB: E' importante fare la seguente osservazione riguardo la funzione di Basic Probability assignment, essa non costituisce una Misura, poichè se fosse una Misura dovremmo dire che la massa dell'insieme universale fa sempre uno. Invece noi abbiamo che questa è la SOMMA DELLE MASSE DEL POWER SET il cui valore deve essere sempre pari ad uno. Vedremo più avanti che quando la massa dell'Insieme Universale (che è appunto un'elemento del Power Set) risulta pari a zero ci troviamo in una situazione lontana dalla totale ignoranza.

Il valore della *bpa* per un particolare insieme A , (indicato con $\mathbf{m}(A)$), esprime la 'misura' di tutte le prove significative e disponibili, che sostengono che un particolare elemento dell'insieme universale X , appartiene a TUTTO l'insieme A e non ad un particolare sottoinsieme di A . Il valore di $\mathbf{m}(A)$ è pertanto pertinente ESCLUSIVAMENTE A TUTTO L'INSIEME A e non fa alcuna considerazione aggiuntiva relativa ai suoi sottoinsiemi. Se vengono considerate ulteriori prove a sostegno dei sottoinsiemi di A , allora è possibile rappresentare questa maggiore caratterizzazione utilizzando nuovamente un'altra *bpa*, *i.e* $B \subset A$ $\mathbf{m}(B)$ rappresenterà la *bpa* sottoinsieme B . Limitando così la nostra ricerca su un range più ristretto, nel quale circoscriviamo la nostra conoscenza del fenomeno. Ogni insieme $A \in P(X)$ per il quale risulta $\mathbf{m}(A) \neq 0$ prende il nome di *focal element*, ovvero elemento focale. La coppia (F, \mathbf{m}) , dove F indica l'insieme di tutti gli elementi focali di m , è denominata *body of evidence* ovvero corpo delle prove.

Quanto appena descritto può essere formalmente sintetizzato attraverso le seguenti tre equazioni:

$$m : P(X) \rightarrow [0, 1] \quad (1.1)$$

$$m(\emptyset) = 0 \quad (1.2)$$

$$\sum_{A \in P(X)} m(A) = 1 \quad (1.3)$$

dove $P(X)$ rappresenta *il power set di X*, il \emptyset è l'insieme vuoto ed in fine A è un insieme generico del power set, *i.e* $A \in P(X)$. I Valori che assume questa funzione \mathbf{m} prendono il nome di *basic belief masses*.

Esempio: Consideriamo nuovamente l'esempio dell'identificazione di un'oggetto. Supponiamo che le prove disponibili sostengono che l'oggetto identificato sia un carrarmato, quando potrebbe essere identificato come un'aereo oppure un jet. Il nostro grado di confidenza su tale informazione è pari al 0.7. Quindi la *bpa*, $m(\text{carroarmato}) = 0.7$. La Belief restante è assegnata a $m(X) = \{\text{carroarmato}, \text{aereo}, \text{jet}\} = 0.3$. Mentre la probabilità Bayesiana avrebbe assegnato 0.3 a $m(\text{not-carroarmato})=0.3$. Tuttavia nessuna prova è stata presentata per giustificare tale affermazione, mentre la DST assegna semplicemente LA MASSA ALL'INSIEME UNIVERSALE ESPRIMENDO LA TOTALE INCERTEZZA o se vogliamo IGNORANZA sul sistema.

Possiamo quindi considerare la *bpa*, come una generalizzazione dell'assegnazione delle probabilità in ambito probabilistico; tuttavia non si può equiparare ad essa in quanto tale interpretazione di carattere generale non è in grado di cogliere completamente l'essenza della rappresentazione della conoscenza del sistema attraverso il

power set. Infatti, tale modello consente di esprimere un maggiore SPETTRO DI POSSIBILITA' o se vogliamo uno spazio più grande rispetto a quello definito secondo la classica teoria della probabilità, questo si riflette nella possibilità di assegnare le probabilità non solo ai singoli eventi ma ad un gruppo di eventi senza conoscere la loro probabilità. Abbiamo quindi una maggiore flessibilità nel descrivere il fenomeno, dove tale flessibilità si traduce nella definizione della bpa attraverso la quale stabiliamo un LIMITE SUPERIORE (UPPER BOUND) ed un LIMITE INFERIORE (LOWER BOUND) per uno specifico intervallo.

Naturalmente, quando si definisce un LB ed un UB occorre stabilire in riferimento a cosa! Ovvero, all'interno di questo intervallo di valori che cosa stiamo effettivamente cercando? Il nostro desiderio sarebbe quello di determinare approssimativamente il valore esatto della probabilità che assume un particolare insieme di interesse per la nostra applicazione. In altre parole, all'interno di questo intervallo si cela il valore preciso della probabilità da assegnare ad esempio ad uno specifico evento definito da un'opportuno insieme significativo per la nostra realtà d'interesse. Questo intervallo risulta Limitato da due MISURE CONTINUE E NON-ADDITIVE (una super-additiva e l'altra sub-additiva) che prendono il nome rispettivamente di BELIEF e PLAUSIBILITY. Queste due misure ci consentono di cogliere *l'imprecisione nell'attribuire le probabilità agli eventi del nostro sistema*. Questo approccio ci consente quindi di quantificare in generale qualsiasi tipologia d'incertezza coinvolta nell'analisi del problema, fornendo una specifica unità di misura, la quale deve essere unica per ogni corrispondente situazione. Prima di definire qualitativamente questi due concetti, è essenziale comprendere l'importanza intrinseca di queste due misure.

Supponiamo di essere in grado di misurare la quantità di incertezza presente in una situazione di problem-solving, formalizzata da un'opportuno modello matematico. Inoltre, immaginiamo che tale valore possa essere ridotto a partire dall'acquisizione di informazioni significative che possono essere il risultato di una determinata azione (ad esempio l'aver trovato un fatto rilevante per la nostra analisi oppure attraverso la progettazione di un'esperimento significativo e la successiva osservazione dei risultati, oppure l'arrivo di un'informazione attesa o la scoperta di una serie storica importante per la nostra decisione...). Allora, la quantità di informazione ottenuta in seguito a questo tipo d'azione può essere tradotta in un'opportuna misura che riduca il livello d'incertezza presente nel nostro sistema. Quindi sotto quest'ottica, la 'quantità d'incertezza' (pertinente ad una particolare situazione='configurazione del problema') e la quantità di informazione (ottenuta da un'azione significativa) sono strettamente connesse tra loro. Inoltre, la quantità d'informazione contenuta nella descrizione matematica del problema può essere misurata come la differenza tra il Massimo ed il Minimo valore delle probabilità pertinente alla situazione (ovvero la misura della lunghezza dell'intervallo che quantifica l'incertezza).

Qualitativamente possiamo definire questi due concetti nel seguente modo:

- **Belief:** la Credibilità è L'INTENSITA' di tutte le prove che sono a supporto di una certa decisione, ovvero di una certa scelta che faccio.
- **Plausibility:** la Plausibilità, la possiamo formalizzare come L'INTENSITA' di tutte le prove che non contrastano con le ipotesi che sto facendo, cioè che non sono a favore di altre ipotesi.

Esempio: Si consideri la situazione in cui dobbiamo identificare la presenza di un guasto in un'automobile. Seguendo il classico manuale del troubleshooting si ipotizza che le possibili cause siano:

- MANCA LA BENZINA
- BATTERIA SCARICA

Inoltre a scopo dimostrativo consideriamo i due eventi mutuamente esclusivi, sebbene nella realtà si possono verificare congiuntamente; per quanto riguarda invece l'indipendenza si può ritenere accettabile che l'assenza di benzina nel serbatoio non condiziona lo stato della batteria e viceversa. Nel momento in cui mi viene detto che l'auto non parte, non ho alcuna prova che manchi la benzina e non ho prove a sostegno dell'ipotesi che la batteria sia scarica. E quindi la credibilità è Minima.

istante iniziale $t = 0$. $Bel(Benzina)=0$ e $Bel(Batteria)=0$.

Mentre la Plausibilità è Massima, poichè non ho ancora nessuna intensità di prove che contrasta con una delle due (Tutto è possibile).

istante iniziale $t = 0$. $Pl(Benzina)=1$ e $Pl(Batteria)=1$. Possiamo immaginare di rappresentare questa situazione con due contenitori, all'interno dei quali abbiamo la massa corrispondente alla Credibilità ed alla Plausibilità vedi figura 1.5:

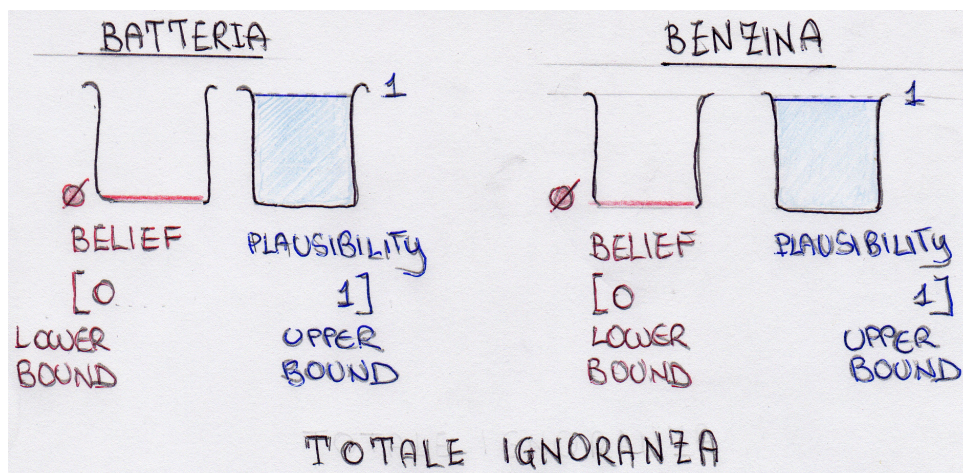


Figura 1.5: Completa ignoranza

Possiamo notare che tale configurazione rispecchia una situazione di TOTALE IGNORANZA. Questo mette maggiormente in risalto la sostanziale differenza rispetto alla teoria Bayesiana, che avrebbe equidistribuito le probabilità tra i singoli eventi. Nel nostro caso questa configurazione si rispecchia nell'assegnare all'insieme Universale tutta la massa del Power Set. Inoltre, un'osservazione piuttosto banale risiede nell'interpretazione degli intervalli di probabilità che in sostanza ci dicono che la probabilità da assegnare ai due possibili eventi che caratterizzano il nostro frame of discernment risulta compresa tra zero ed uno. In parole povere non mi sto pronunciando sul valore della probabilità da attribuire ai singoli eventi, ne naturalmente sto restringendo l'insieme dei valori possibili che essa può assumere.

Successivamente apriamo lo sportello dell'auto e guardiamo nel quadro ed osserviamo che la spia è debole. Questo segnale lo interpreto come una possibile causa da accreditare alla batteria. Ovviamente non è ancora

detto che sia completamente scarica, ma ho un forte sospetto che la batteria non stia in buone condizioni. Quindi come si traduce questa nuova intensità di prova (naturalmente non ancora al 100 %) che la batteria sia il colpevole? La conseguenza si riflette in un'innalzamento della Belief relativa alla Batteria ed una corrispondente diminuzione della Plausibility della Benzina. In questa situazione la valutazione risulta piuttosto semplice poichè i casi possibili che stiamo considerando sono solo due, e quindi se abbiamo delle prove che avvalorano una delle due ipotesi, necessariamente l'altra ne esce fuori parzialmente innocente. Questa situazione di 'Parziale conoscenza' la possiamo qualitativamente rappresentare con la seguente configurazione 1.6:

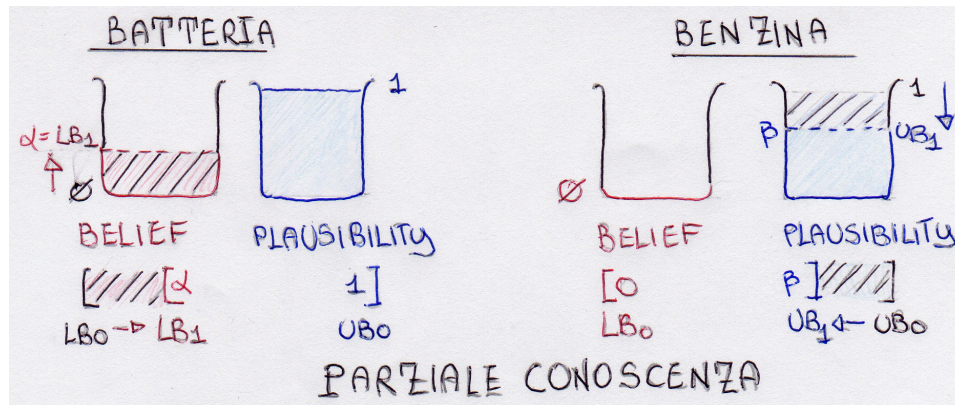


Figura 1.6: Parziale Conoscenza

Da questa figura possiamo notare che la Belief è una funzione monotona crescente mentre la Plausibility è una funzione monotona decrescente, inoltre la Belief di un dato evento è legata alla plausibility degli eventi disgiunti da esso. Questo risulta piuttosto intuitivo in quanto il fatto di avvalorare delle ipotesi a favore di un certo evento vanno a discapito della plausibility degli altri eventi disgiunti e quindi risultano in contrasto con le prove che li sostengono (questo comporta la conseguente diminuzione). Questo nuovo UPDATE si traduce in un'ulteriore redistribuzione della massa dell'insieme Universale sugli eventi elementari ed un corrispondente restringimento dell'intervallo delle possibili probabilità (Rispettando sempre che la somma complessiva delle massa del Power Set risulti pari ad uno). Naturalmente il discorso si ribalterebbe completamente se notassi delle prove differenti che avvalorano delle ipotesi contrarie; come ad esempio l'accensione della spia della Benzina. Quindi, dalle considerazioni precedenti, possiamo ulteriormente immaginare il sistema come un'insieme di vasi comunicanti, in cui la diminuzione della Plausibility di un certo evento fluisce nel serbatoio della Belief degli eventi disgiunti. Pertanto per mettere in evidenza la componente dinamica dell'incertezza del sistema possiamo raffigurare la situazione nella seguente maniera 1.7:

Da qui si comprende il motivo per cui la massa del corpo delle prove di tutto il power set deve essere costante ed il modo in cui si distribuisce tra i suoi elementi dipende da come viene aggiornata la conoscenza del sistema (In altre parole come decidiamo di aprire e chiudere le valvole). Un'altra possibile analogia è quella di immaginare una certa energia potenziale racchiusa nella massa complessiva del Power Set, che si può sprigionare, manifestare sugli eventi del frame of discernment. (Nulla si crea, nulla si distrugge, ma avviene una trasformazione della Plausibility in Belief). E' come se avessimo in un processo un'insieme di potenziali indiziati sui quali non abbiamo ancora alcuna prova che sostenga la loro colpevolezza. Quindi l'energia potenziale è inizialmente legata al valore massimo della Plausibility (uno) di tutti gli elementi del frame of discernment

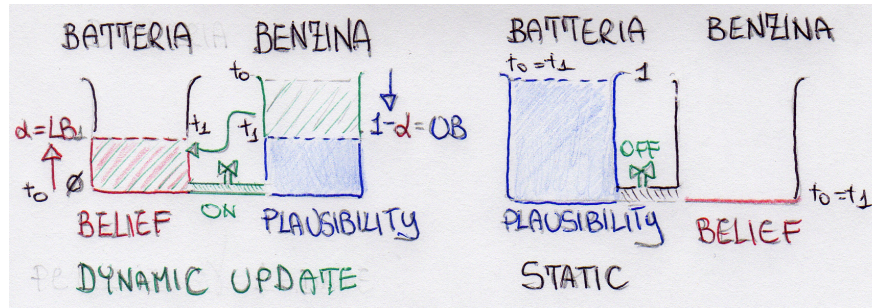


Figura 1.7: Update Conoscenza

ed una Belief con il valore minimo (zero). In seguito, solo le prove a sostegno di una certa ipotesi convertono tale energia in un’azione effettiva (e quindi un lavoro) da intraprendere.

In fine tentiamo di mettere in moto la macchina e ci accorgiamo che il motore non gira e quindi aumenta il Belief della Batteria ed automaticamente scende la Plausibility che il colpevole sia la Benzina.^{1.8}

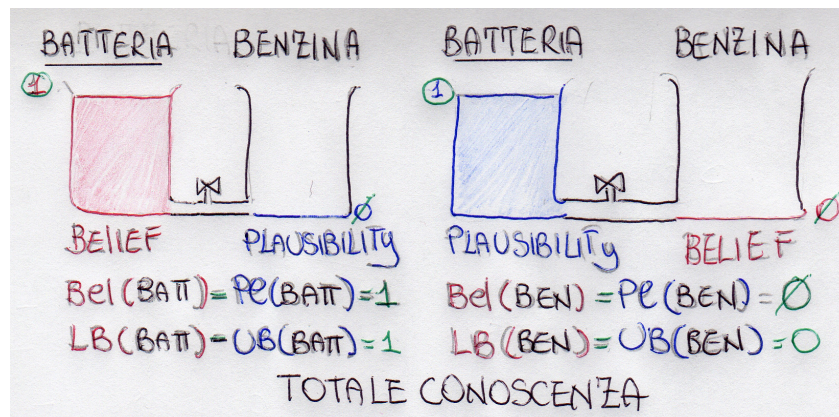


Figura 1.8: Totale Conoscenza

Dalla figura possiamo notare due importanti conseguenze delle nuove prove. Innanzitutto, ci troviamo in una situazione di TOTALE CONOSCENZA, ho determinato con certezza chi è il colpevole. Quando la Belief arriva ad uno e la Plausibility di tutti gli altri è scesa a zero ci troviamo in una situazione di totale certezza in cui ho individuato la causa di un certo fenomeno. In secondo luogo abbiamo determinato la probabilità di tutti gli eventi, la quale si traduce sostanzialmente nella coincidenza dell’UPPER BOUND con il LOWER BOUND di ogni singolo evento; In altre parole tutti gli intervalli sono collassati in un singleton (ovvero un singolo valore) che riflette la probabilità del singolo evento. Nell’esempio considerato la cosa risulta poco significativa ($P(\text{Batteria})=100\%$ e $P(\text{Benzina})=0$), ma in generale è interessante notare come questa situazione di convergenza verso una certa soluzione ci consenta in qualche modo di costruire la funzione di distribuzione di probabilità per un’insieme di variabili aleatorie. Da questo esempio abbiamo potuto comprendere il motivo per cui si parla di incertezza riducibile ed incertezza irriducibile, la quale si riduce progressivamente via via che la massa si ‘sgocciola’ nei rispettivi eventi del frame of discernment fino a raggiungere una situazione di equilibrio. Inoltre è chiaro il motivo per cui si assegnano rispettivamente i valori di LB ed UB alla Belief ed alla Plausibility., in quanto da una situazione di totale incertezza, con l’aquisizione di nuove informazioni aumenta

la nostra Belief relativa ad alcune ipotesi e diminuiscono le corrispondenti Plausibility.

Prima di procedere alla formalizzazione delle funzioni appena descritte, si ritiene opportuno richiamare un concetto fondamentale dell'Algebra Insiemistica, a partire dal quale definiremo le proprietà di super-additività e sub-additività delle funzioni Belief e Plausibility. Il principio base prende il nome di ***Inclusion-Exclusion Principle***.

1.2.1 Principio di Inclusione-Esclusione

Generalmente, quando si effettuano delle operazioni su degli insiemi è importante tener conto della loro numerosità. A tale proposito si ha:

1. Per ogni gruppo di oggetti A , può essere associata una quantità scalare (indicata con $|A| \geq 0$), chiamata CARDINALITA' di A ; che indica il numero di elementi di A .
2. Se $X = A \cup B$ e $A \cap B = \emptyset$ Allora $|X| = |A| + |B|$.

Quindi se un gruppo di oggetti X viene scomposto in due gruppi (indicati rispettivamente con A e B , $A, B \subset X$) che non hanno elementi in comune ($A \cap B = \emptyset$) e tali che la loro unione da come risultato l'insieme X ($A \cup B = X$), allora il numero degli elementi presenti in $|X|$ si possono calcolare semplicemente calcolando prima gli elementi di A e poi gli elementi di B ed in fine sommare i risultati ottenuti da tali operazioni. Questo risultato intuitivo ha dei risvolti pratici importanti. Innanzitutto esprimiamo la proprietà in maniera differente per dare maggiore enfasi alla natura del problema che affronteremo.

$$\text{Se } A \cap B = \emptyset \text{ Allora } |A \cup B| = |A| + |B|.$$

In sostanza, invece di considerare l'insieme X e successivamente scomporlo in due gruppi tali che la loro intersezione sia nulla; possiamo invece partire da due insiemi che non hanno elementi in comune e combinarli per ottenere un nuovo insieme. La parola chiave è 'combinazione', poichè vedremo più avanti il problema di combinare più masse associate a differenti elementi del Power Set è importante al fine di aggiornare lo stato di conoscenza del nostro sistema. Comunque, per il momento sottolineiamo che mentre la scelta di scomporre un'insieme in due insiemi disgiunti può essere del tutto arbitraria, l'unione di due insiemi disgiunti è univoca. Ma la questione fondamentale è che non sempre la combinazione di più masse in un sistema coinvolge insiemi disgiunti quindi ci si pone la seguente domanda:

- Se i due insiemi considerati A e B non risultassero disgiunti, come posso calcolare la cardinalità dell'insieme ottenuto dalla loro Unione ?

Ovviamente non possiamo più applicare la formula precedente, o per lo meno se volessimo definire una relazione di carattere più generale (che ci consenta di applicarla sia in una situazione di insiemi disgiunti che di insiemi non disgiunti), dovremmo aggiungere qualche termine che tenga conto dell'eventuale presenza di elementi comuni. A tale proposito giunge in nostro soccorso il ***Principio di Inclusione-Esclusione***:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|. \quad n = 2. \tag{1.4}$$

Anche questo risultato è abbastanza intuitivo. In effetti se A e B hanno elementi in comune, nella somma $|A| + |B|$ alcuni elementi sono stati calcolati due volte, quindi occorre stabilire quanti sono effettivamente tali

'doppioni'. Risulta naturale che il numero di elementi comuni è dato esattamente dalla cardinalità dell'insieme che si ottiene dall'intersezione dei due insiemi, ovvero $|A \cap B|$. Pertanto dobbiamo sottrarre suddetta quantità alla somma complessiva degli elementi. Da qui si comprende il motivo per cui tale Principio prende il nome di Principio di Inclusione ed Esclusione. Naturalmente, questo concetto riferito alle masse ci consentirà di non considerare più volte il contributo di una massa relativa alla stessa prova. Ovviamente, a partire da queste considerazioni riferite al caso base in cui abbiamo solo due insiemi, è possibile estendere suddetto Principio nel caso di più insiemi. A tale proposito si consideri il caso in cui $n = 3$.

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \quad n = 3. \quad (1.5)$$

Questa formula può essere interpretata nel seguente modo:

In sostanza possono presentarsi i seguenti casi:

1. Sia $x \in (A \cup B \cup C)$ e tale che $x \in A$, allora viene calcolato una sola volta.
2. Supponiamo ora che $x \in (A \cap B)$, quindi viene calcolato 2 volte e sottratto una volta = 1.
3. Supponiamo in fine che $x \in (A \cap B \cap C)$, viene quindi calcolato 4 volte e sottratto 3 volte = 1.

Più in generale se abbiamo n differenti insiemi $A_i = A_1, A_2, \dots, A_n$, allora la formula può essere generalizzata nel seguente modo:

$$\begin{aligned} |\bigcup_{i=1}^n A_i| &= \sum_{i=1}^n |A_i| \\ &\quad - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| \\ &\quad + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| \\ &\quad - \dots \\ &\quad + (-1)^{n-1} |\bigcap_{i=1}^n A_i| \end{aligned} \quad (1.6)$$

A sinistra dell'equazione abbiamo l'insieme formato dall'unione degli n sottoinsiemi considerati $S = (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \dots \cup A_n)$. Negli elementi di destra abbiamo:

1. Inizialmente contiamo separatamente il numero degli elementi presenti in ciascun sottoinsieme e sommiamo i risultati.
2. Se gli insiemi A_i non sono disgiunti, allora un'elemento può essere considerato più volte. Questi elementi sono quelli che appartengono ad almeno due degli insiemi A_i oppure all'intersezioni $A_i \cap A_j$. Dato che $A_i \cap A_j = A_j \cap A_i$, quindi per evitare duplicazioni consideriamo solo le coppie (A_i, A_j) con $i \leq j$.
3. Quindi effettuiamo la somma del numero degli elementi presenti nell'intersezione di tali coppie, è possibile che alcuni vengano sottratti più di una volta. Questi sono gli elementi che appartengono ad almeno tre insiemi A_i . Pertanto sommiamo la somma degli elementi che appartengono all'intersezione di tre insiemi. (la condizione $i \leq j \leq k$ assicura che ogni intersezione venga considerata una sola volta).
4. Il processo va avanti con le somme che vengono in modo alternato addizionate e sottratte, fino a quando non si raggiunge l'ultimo termine (ovvero l'intersezione di tutti gli insiemi A_i).

La dimostrazione di questo principio è basata sulle proprietà del calcolo combinatorio ed in particolare sul coefficiente binomiale. Comunque non entriamo nei dettagli, l'importante è che siamo in grado di 'cogliere' le masse dei vari elementi senza cadere nella trappola di valutarle più volte. Tanto per avere un'idea sul come applicare la formula nel caso più complesso in cui si abbiano 4 insiemi si consideri il seguente esempio.

Esempio: Sia $X = (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)$

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| &= (|A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4|) \\ &\quad - (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_1 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3| + |A_2 \cap A_4| + |A_3 \cap A_4|) \\ &\quad + (|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4|) \\ &\quad - (|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|). \end{aligned}$$

A questo punto nasce la seguente domanda: Che cosa significa considerare l'unione di più sottoinsiemi?

E' l'insieme formato dagli elementi che appartengono ad A oppure a B (o a entrambi). Questo può essere considerato in termini di proprietà che godono gli elementi dell'insieme risultante. Infatti, per ogni elemento che appartiene ad un dato insieme possiamo elencare una o più proprietà. Quindi se indichiamo con P_1, P_2, \dots, P_n , le proprietà che sono soddisfatte da uno o più elementi $x \in S$, allora chiameremo A_i l'insieme di tutti gli elementi di X che godono della proprietà P_i . Ovvero:

$$A_i = \{x \in X : x \text{ gode della proprietà } P_i\} \quad 1 \leq i \leq n.$$

Quindi la formula :

$$\bigcup_{i=1}^n A_i$$

Rappresenta il sottoinsieme di X che è formato dagli elementi di S che hanno almeno una delle proprietà P_i . Se si desidera invece considerare il numero degli elementi di X che non godono delle proprietà P_1, P_2, \dots, P_n basta semplicemente applicare la seguente formula:

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \dots \cap \overline{A_n}| = |X| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n|. \quad (1.7)$$

1.2.2 Lower Bound and Upper Bound

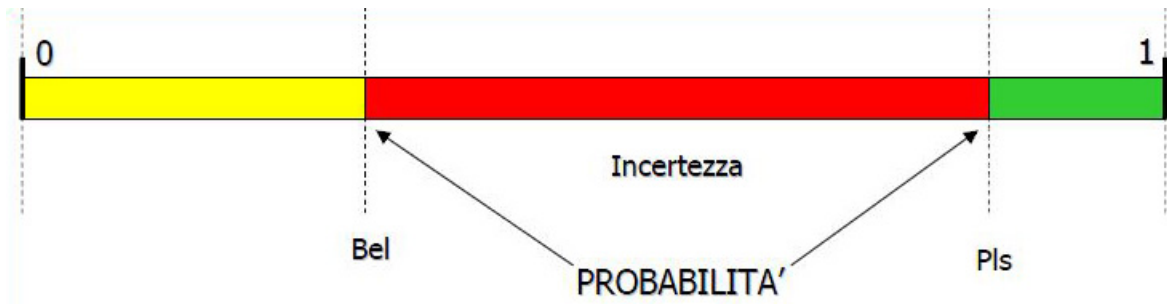


Figura 1.9: Intervallo di incertezza

Dagli esempi considerati precedentemente, abbiamo visto che la probabilità che si verifichi un evento rientra all'interno di una banda di incertezza, che inizia dal valore della credibilità fino a giungere a quello della Plausibilità. A questo punto cerchiamo di formalizzare matematicamente questo intervallo di valori.

Lower Bound:

In una situazione in cui si abbiano un'insieme di ipotesi che caratterizzano il nostro Power set, alle quali possono corrispondere una o più proposizioni, è molto probabile che la prova ottenuta possa sostenere una di queste proposizioni e quindi avvalorare una o più ipotesi del Power Set. La prova fornita, in realtà potrebbe anche sostenere un'altra proposizione nel caso in cui tale proposizione sia contenuta nella proposizione in questione. La bpa come abbiamo visto in precedenza assegna la massa o belief esattamente ad una delle proposizioni. Ora la nostra attenzione si concentrerà sulle funzioni Belief. Una funzione Belief è vista come la totale convinzione personale che la prova risieda in una data proposizione **COMPRENDENDO TUTTE LE POSSIBILI PROPOSIZIONI IMPLICATE DA ESSA**.

Formalmente possiamo dire che la **Belief** è definita come la somma di tutte le bpa dei sottoinsiemi propri (B) dell'insieme d'interesse (A) ($B \subseteq A$). In sintesi stiamo considerando la somma di tutte le masse dei sottoinsiemi di A ed ovviamente A stesso. Vediamo però nello specifico come si giunge a suddetta definizione.

Quindi data una particolare domanda, sia Θ un'insieme finito, costituito dall'insieme di tutte le possibili risposte a tale domanda, noto anche come **frame of discernment**, e sia 2^Θ l'insieme di tutti i sottoinsiemi di Θ (tutte le possibili combinazioni delle risposte).

$$2^\Theta = \{A | A \subseteq \Theta\}. \quad (1.8)$$

Il sottoinsieme A comprende come caso particolare l'insieme vuoto \emptyset (che corrisponde a nessuna risposta) e tutto l'insieme Θ che corrisponde all'insieme universale (che comprende tutte le singole risposte). Tale sottoinsieme A rappresenta quindi un'affermazione o proposizione (enunciato verbale di un giudizio) che sostiene che la verità si nasconde da qualche parte nel sottoinsieme A . Allora possiamo definire una funzione reale su tali sottoinsiemi chiamata Belief function:

$$Bel: 2^\Theta \rightarrow [0, 1] \quad (1.9)$$

La quale deve soddisfare i seguenti Tre Assiomi:

1. **Assioma:** $Bel(\emptyset) = 0$.

2. **Assioma:** $Bel(\Theta) = 1$.

3. **Assioma:** dato un numero arbitrario di sottoinsiemi n , i.e. $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n \subset \Theta$:

$$Bel\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \geq \sum_{I \subset \{1,2,\dots,n\}; I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} Bel\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right).$$

Nel caso in cui $n = 2$ e $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, l'assioma 3 si riduce:

$$\begin{aligned} Bel(A_1 \cup A_2) &\geq (-1)^{1+1}(Bel(A_1) + Bel(A_2)) + |I| = 1 \\ &(-1)^{2+1} \overbrace{(Bel(A_1 \cap A_2))}^0 \quad |I| = 2. \\ &\geq Bel(A_1) + Bel(A_2). \quad \leftarrow (risultato) \end{aligned}$$

Dal risultato finale si riconosce immediatamente che questi assiomi sono 'simili' a quelli corrispondenti al calcolo tradizionale delle probabilità, con l'unica differenza che l'assioma 3 è valido con il simbolo di \geq invece che con il simbolo di uguaglianza. Quando risulta valido con il simbolo di uguaglianza risulta: $Bel(A_1 \cup A_2) = Bel(A_1) + Bel(A_2)$ se $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Pertanto, una funzione di probabilità risulta additiva mentre una belief in generale non lo è. Questi assiomi generali non dicono altro che le funzioni Belief comprendono come caso particolare quello delle funzioni di probabilità e possono essere utilizzate in modo equivalente se non in modo migliore per rappresentare i gradi di Credibilità.

Come abbiamo già accennato in precedenza, sommare le probabilità di eventi disgiunti può avere un senso; tuttavia ci si pone la seguente domanda: Può essere giustificata un'estensione del modello, considerando delle misure non additive?

Naturalmente la risposta è affermativa. Un esempio proviene dalla statistica Bayesiana, utilizzata per rappresentare l'ignoranza, dove la verità si trova in Θ ma non abbiamo informazioni, probabilistiche o logiche, che giustifichino dove potrebbe risiedere la risposta al nostro problema. Pertanto, la $Bel(\Theta)=1$ ma $Bel(A)=0$ per ogni sottoinsieme proprio A di Θ . Risulta evidente che tale funzione non può essere additiva, infatti $A \cap \Theta \neq \emptyset$.

Quindi, se da una parte la Probabilità Bayesiana permetta di avere una solida base di assiomi (legata principalmente alla natura additiva dell'algebra su cui è definita) a partire dalla quale vengono dimostrati una serie di teoremi che danno maggiore rigore alla struttura matematica utilizzata; essa ha un'utilizzo piuttosto limitato nel modellare situazioni governate dall'incertezza. Al contrario, la flessibilità fornita dalla DST consente una maggiore astrazione del problema in quanto ha meno ipotesi restrittive, tuttavia tale libertà deve essere opportunamente gestita. (E' incredibile come in un'assioma, semplicemente cambiando la relazione d'ordine di un'equazione si possa vedere un problema da una prospettiva differente).

Il concetto chiave della funzione Belief è come viene ridistribuita la massa all'interno del sistema in oggetto. Infatti, mentre le funzioni di distribuzione delle probabilità prevedono che la credibilità deve essere in qualche modo ripartita tra i singoli elementi del frame Θ , le belief functions ammettono i *basic probability numbers* (or *mass numbers*), che vengono assegnati a tutti i sottoinsiemi dell'insieme delle parti di Θ senza ulteriori ripartizioni. L'idea fondamentale è che tutta la Credibilità viene ripartizionata in uno o più numeri di massa diversi ovviamente da zero ovvero $m(A_i) \neq 0$ che costituiscono il corpo delle prove, la cui somma complessiva

deve risultare pari all'unità. Il numero $m(A)$ assegnato ad un'elemento focale A non viene ulteriormente ripartito nei sottoinsiemi propri di A . Questo quindi suggerisce una definizione alternativa di *belief function*.

Dato un basic probability number $m(A)$ la $Bel(A)$ è definita:

$$Bel(A) = \sum_{B|B \subseteq A} m(B) \quad (1.10)$$

Logicamente, una parte della credibilità rimessa ad un giudizio di una proposizione è equivalente a tutte le proposizioni che sono implicitamente contenute. Pertanto, la credibilità totale di un sottoinsieme A è data dal somma dei contributi di tutte quelle relative ai sottoinsiemi propri di A e di A stesso.

Nella situazione in cui le funzioni Belief sono l'unica informazione disponibile, è possibile risalire all'assegnazione delle masse del sistema date dalla bpa, con la seguente trasformazione inversa, detta anche **Möbius Transformation**:

$$m(A) = \sum_{B \subset A}^{|A-B|} Bel(B) \quad (1.11)$$

Dove $|A - B|$ è la differenza tra la cardinalità dei due insiemi A e B .

Upper bound: Nel testo 'A Mathematical Theory of Evidence' Glen Shafer sostiene che la Belief di una specifica proposizione che riguarda un'insieme di ipotesi non era sufficiente per dettagliare in maniera completa il livello di certezza corrispondente alla prova dalla quale è stata assegnata la Belief. Pertanto occorre introdurre un'ulteriore misura che tenga conto del Dubbio relativo all'assegnazione della Belief. Quindi data la funzione Belief di un insieme A , indicato con $Bel(A)$, il grado di dubbio o se vogliamo il grado del nostro 'scetticismo' relativo alla confidenza che la prova risieda in A è definito da:

$$Dou(A) = Bel(\bar{A}). \quad (1.12)$$

A partire da questa è stata definita un'altra grandezza la Plausibilità:

$$Pl(A) = 1 - bel(\bar{A}) \quad (1.13)$$

La Plausibilità è una Misura Monotona Decrescente, che soddisfa la proprietà di SUB-ADDITIVITA'.

Dato un numero arbitrario di sottoinsiemi n , i.e. $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n \subset \Theta$:

$$Pl\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) \geq \sum_{I \subset \{1, 2, \dots, n\}; I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} Pl\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right).$$

la Plausibilità è data dalla somma di tutte le bpa degli insiemi (B) la cui intersezione con l'insieme d'interesse (A) è tale che $(B \cap A \neq \emptyset)$.

$$Pl(A) = \sum_{B \subset X} m(B) - \sum_{B \subset A} m(B) = \sum_{B|B \cap A \neq \emptyset} m(B). \quad (1.14)$$

Entrambe le misure risultano non-additive. Ovvero la loro somma complessiva può essere differente da uno.

Quindi a seconda del tipo di applicazione, il risultato finale della DST potrebbe essere un'intervallo. L'intervallo contiene sia la Belief che la Plausibility di qualche proposizione A .

In sintesi dato uno qualsiasi dei valori di questa terna ($m(A)$, $\text{Bel}(A)$, $\text{Pl}(A)$) è possibile ricavare i valori delle altre due misure. Il valore esatto della probabilità di un evento (inteso nel senso classico probabilistico) ricade nell'intervallo definito dagli estremi $\text{Bel}(A)$ e $\text{Pl}(A)$. Se $\text{Bel}(A) = \text{Pl}(A)$ allora $\text{Bel}(A) = \text{Pl}(A) = P(A)$.

1.3 Regole di Combinazione delle Prove

Lo scopo principale di fondere l'informazione proveniente da uno o più sorgenti, è quello di sintetizzare gli aspetti significativi dei dati, in modo da disporre di una struttura che sia il più possibile snella e facilmente gestibile ed INTERPRETABILE.

Una delle principali limitazioni della teoria di Dempster and Shafer è legata ad un'ipotesi piuttosto restrittiva riguardo l'indipendenza delle sorgenti di informazione. Questo requisito ci pone di fronte ad un'importante questione filosofica.

Da un punto di vista Logico, secondo la Teoria degli Insiemi, queste regole possono essere potenzialmente combinate con una serie di CONGIUNZIONI (AND logici legati all'operazione di intersezione tra insiemi \cap) e DISGIUNZIONI (OR logici legati all'operazione di unione tra insiemi \cup). Ad esempio, date due masse definite sullo stesso frame of discernment Ω tramite una basic belief assignment indotta da due distinte prove, possiamo combinare tra loro questi pezzi di informazione nella seguente maniera:

$$(m_1 \cap m_2)(A) = \sum_{B \cap C = A} m_1(B) \cdot m_2(C) \quad \forall A \subseteq \Omega \quad (1.15)$$

$$(m_1 \cup m_2)(A) = \sum_{B \cup C = A} m_1(B) \cdot m_2(C) \quad \forall A \subseteq \Omega \quad (1.16)$$

La scelta di una di queste due regole di combinazione è essenzialmente legata all'affidabilità delle due sorgenti.

- **Conjunctive Evidence:** Se si reputa che entrambe le sorgenti di informazione siano completamente affidabili, allora le due corrispondenti bba (basic belief assignment) potrebbero essere combinate mediante un'operazione di AND. Poichè si ipotizza che in tale circostanza si presenta una configurazione di Consistent Evidence, il che vuol dire che abbiamo un comune accordo tra le sorgenti del nostro sistema. (Da qui si comprende il motivo di utilizzare l'intersezione, tale operazione viene riferita come CONJUNCTIVE EVIDENCE). Pertanto, se si ripone completamente la nostra fiducia sull'affidabilità di tutte le sorgenti del sistema, possiamo effettuare un'operazione di AND. (**A and B and C ...**).
- **Disjunctive Evidence:** Viceversa, tornando al caso precedente delle due sorgenti, se si crede che almeno una delle due sorgenti si possa considerare affidabile, allora in questo caso si ritiene opportuno combinare le due informazioni con un'operazione di OR. Poichè non abbiamo la totale certezza su chi possa in realtà fornire la prova maggiormente attendibile e quindi occorre prendere in considerazione le informazioni che provengono da una o dall'altra fonte. Pertanto in una situazione in cui abbiamo un'unica sorgente che possa essere ritenuta attendibile, è preferibile ricorrere ad una combinazione di OR. (**A or B or C ...**).
- **Trade off Evidence:** In generale, è possibile affrontare il problema con un'approccio ibrido che tiene in considerazione diverse combinazioni delle due operazioni che ci pongono in una situazione intermedia tra i due estremi considerati (ovvero: (**A and B and C ...**) (**A or B or C ...**)). In altre parole si viene

a creare una situazione di una successione di AND ed OR logici tra le diverse sorgenti del sistema che in qualche maniera caratterizzano un continuum di valori tra la totale confidenza e la totale diffidenza. (**A and B or C ...**); (**A and C or B ...**); etc. Risulta chiaro che queste combinazioni sono numerosissime.

Dubois e Prade descrivono queste tre tipologie di combinazioni come:

- **Conjunctive Pooling:** ($A \cap B$ se $A \cap B \neq \emptyset$).
- **Disjunctive Pooling:** ($A \cup B$).
- **Trade-off Pooling:** (**A and B or C ...**); (**A and C or B ...**); etc. Dove il termine Trade-off sta ad indicare che è possibile raggiungere una situazione di 'compromesso' tra le diverse sorgenti di informazione considerando diverse possibili combinazioni degli operatori logici, nel quale naturalmente deve essere stabilito un modo per quantificare e gestire il grado di conflitto tra esse.

Esistono un gran numero di operatori disponibili per ciascun categoria di pooling, attraverso i quali si possa combinare un'insieme di dati. Un possibile modo per confrontare l'utilizzo di un'insieme di operatori piuttosto che un'altro è quello di studiare le proprietà algebriche che soddisfano.

Seguendo una strategia di tipo Trade-off Pooling, è chiaro che si ha una maggiore libertà di scelta legata ad una minore richiesta di informazioni, rispetto all'approccio Bayesiano (che ha una visione del mondo in bianco e nero); Tuttavia, questi ulteriori gradi di libertà devono essere gestiti opportunamente, poichè dalla loro scelta dipende la bontà della soluzione trovata. D'altro canto, un'approccio categorico come quello Bayesiano, che presenta una visione piuttosto marcata della realtà, non è in grado di esprimere l'incertezza epistemica legata ad essa, confinandola o comunque nascondendola su delle ipotesi di partenza legate all'indipendenza degli eventi e quindi basandosi su un'Algebra Additiva, oppure sul Principio di Ration Insufficiente (in base al quale si adotta una funzione di distribuzione delle probabilità uniforme) o comunque in generale congetturando sulla base di conoscenze teoriche o secondo delle personali convinzioni delle possibili funzioni di distribuzione di probabilità sulla realtà d'interesse.

Seguendo quindi la strada di combinare le diverse sorgenti di informazione con un Mix di And ed Or logici, sono stati sviluppati differenti metodi per combinare le prove utilizzando la base teorica di Dempster and Shafer per rappresentare l'incertezza nel sistema, dove però (vedremo tra breve) interviene un nuovo elemento che differenzierà le varie strategie.

La regola che originariamente fu adottata da DS, per combinare più basic probability assignments, nota come DEMPSTER RULE, è una generalizzazione della regola di Bayes. Tale regola, vedremo più avanti, enfatizza maggiormente le prove che sono di comune accordo tra tutte le sorgenti del sistema, ignorando completamente le prove che danno luogo ad una situazione di conflitto mediante l'utilizzo di un fattore di normalizzazione. Questo tipo di strategia si traduce in un conjunctive pooling; ovvero si considera strettamente un AND tra le bba del sistema.

Naturalmente quando la quantità di conflitto esistente tra le differenti sorgenti del sistema risulta significativo, la Dempster Rule perde di efficacia e può portare a dei risultati inattesi o per lo meno difficilmente interpretabili. Di conseguenza diversi ricercatori hanno presentato delle soluzioni che costituiscono delle modifiche alla regola di Dempster, in modo da tenere in considerazione il grado di conflitto nella soluzione finale.

Il problema di come gestire il conflitto ed il modo di assegnare le bpa (basic probability assignments)(m) della massa associata ad esso è l'elemento chiave che consente di distinguere le differenti regole di combinazione.

Risulta chiaro che non esiste una Regola di combinazione assoluta; e la scelta di adottare un metodo piuttosto che un'altro è legato essenzialmente alla natura del problema. Nello specifico è fondamentale comprendere in linea di massima, la quantità di conflitto che dovrebbe essere gestita nel contesto della particolare applicazione da progettare.

Nei paragrafi successivi, dopo aver descritto la Regola di combinazione delle masse di Dempster, mettendo in evidenza le sue principali limitazioni, presenteremo 2 diverse alternative che costituiscono delle modifiche alla Dempster Rule; esattamente sono:

1. **Yager's Rule.**
2. **Inagaki's Extra Rule.**

Come è stato accennato precedentemente, le differenti Regole di combinazione vengono confrontate sulla base delle proprietà algebriche di cui godono gli operatori utilizzati. In particolare considereremo 4 proprietà algebriche, tra cui una delle più importanti sarà la quarta:

- **Commutatività:** $A * B = B * A$.
- **Idempotenza:** $A * A = A$.
- **Continuità:** $A * B \approx A' * B$ dove $A' \approx A$ indica che A' è molto vicino ad A .
- **Associatività:** $A * (B * C) = (A * B) * C$.

Dove il simbolo $*$ rappresenta l'operazione di combinazione.

1.3.1 Regola di Combinazione di Dempster

Prima di procedere alla descrizione della Regola di Dempster, ripercorriamo brevemente gli step analizzati nei precedenti paragrafi.

Una volta stabilito un certo insieme di eventi elementari da cui caratterizzare il frame of discernment Θ , si passa a determinare le probabilità di massa per tutti gli elementi dell'Universo 2^Θ , creato dal Power Set di Θ , dove il Power Set altro non è che l'insieme di tutte le combinazioni linearmente indipendenti degli elementi di un dato universo. Queste vengono in seguito rielaborate per ottenere:

- **La Credibilità:** che indica la minima probabilità che si verifichi il corrispondente evento. Grossolanamente indica quanto sicuramente possiamo credere in un dato elemento di 2^Θ .
- **La Plausibilità:** che rappresenta la massima probabilità che si verifichi il corrispondente evento.
- **L'incertezza:** che è data dalla differenza tra la credibilità e la plausibilità ed indica la banda di probabilità di un dato elemento.

Ricordo inoltre che la probabilità di massa m è una probabilità che si attribuisce ad un dato elemento dell'universo 2^Θ , non basandosi su ciò che si sa, bensì tenendo conto di ciò che si è sicuri non essere. Se $\Theta = [A],[B],[C]$ e sappiamo che in un data situazione possiamo escludere l'elemento $[B]$ possiamo attribuire una data probabilità (m) all'elemento $[A,C]$ di 2^Θ .

Ora ci si pone il problema di combinare più funzioni belief attraverso le loro bpa (m). Queste funzioni di belief hanno come dominio lo stesso frame of discernment, tuttavia sono basate su argomenti che sono Independenti tra loro, o detto in altri termini su corpi di prove indipendenti tra loro. Questa ipotesi, o se preferiamo 'condizione', limita molto l'utilizzo della classica teoria di Dempster and Shafer. Infatti la Regola di combinazione delle masse del sistema, è caratterizzata da un Numeratore che tiene conto della somma di tutte le intersezioni tra le proposizioni che vengono confrontate (comparate), mentre il Denominatore è dato dalla differenza tra l'unità (Ricordo che la somma di tutte le bpa del power set deve fare uno) e la somma di tutti gli insiemi la cui intersezione è l'insieme vuoto.

In particolare, nel caso in cui si consideri la fusione m_{12} di due bpa indicate rispettivamente con m_1 ed m_2 si ha la seguente relazione:

$$m_{12}(A) = \frac{\sum_{B \cap C = A} m_1(B) \cdot m_2(C)}{1 - \sum_{B \cap C = \emptyset} m_1(B) \cdot m_2(C)} \quad \forall A \subseteq X \quad (1.17)$$

Il denominatore può essere espresso equivalentemente nella seguente maniera:

$$1 - \sum_{B \cap C = \emptyset} m_1(B) \cdot m_2(C) = \sum_{B \cap C \neq \emptyset} m_1(B) \cdot m_2(C) \quad (1.18)$$

E' chiaro che in questa relazione i due protagonisti che si limitano a vicenda sono il contributo del numeratore ed il secondo termine del denominatore. Infatti il Numeratore che si basa su una funzione Belief di tipo Conjunctive pooling evidence (poichè considera una pura combinazione di AND logici), viene normalizzato rispetto alla massa delle prove consistenti delle due sorgenti (ovvero $B \cap C \neq \emptyset$) ed assegna tutto il conflitto esistente tra le diverse sorgenti all'insieme vuoto, ignorando in questo modo la contraddizione presente nel sistema. E' chiaro che la contraddizione del sistema è legata al secondo termine del denominatore ($B \cap C = \emptyset$) che gioca un ruolo decisivo. Infatti se il suo contributo è trascurabile allora il numeratore viene approssimativamente normalizzato rispetto alla somma di tutte le bpa del power set, se invece tale contributo tende a crescere, il numeratore non viene ridimensionato a causa della riduzione significativa del denominatore con conseguente aumento del valore di $m_{12}(A)$. Da qui si comprende il motivo per cui il denominatore prende il nome di COSTANTE DI RENORMALIZZAZIONE (in quanto effettivamente non si tratta di una vera normalizzazione, il caso ideale in cui si ha una vera normalizzazione è quello in cui il secondo termine del denominatore sia nullo, il che corrisponde all'assenza di conflitto). Per cogliere l'aspetto significativo di questa regola mettiamo in evidenza il denominatore nella seguente maniera:

$$m_{12}(A) = \left[\sum_{B \cap C = A} m_1(B) \cdot m_2(C) \right] \cdot \overbrace{\left[1 - \sum_{B \cap C = \emptyset} m_1(B) \cdot m_2(C) \right]^{-1}}^K \quad (1.19)$$

Il valore di K assume quindi un significato ben preciso, infatti esso contiene un'INFORMAZIONE SIGNIFICATIVA per valutare la coerenza delle prove provenienti dalle diverse sorgenti; ovvero esso fornisce una

MISURA DELLA QUANTITA' DI CONFLITTO ESISTENTE NEL SISTEMA. Possiamo quindi definire un PESO che tenga conto anche del conflitto esistente tra le beliefs, in riferimento alle proposizioni in questione:

$$\begin{aligned}
 Con(Bel_1, Bel_2) &= \log(K) \\
 &= \log\left(\frac{1}{1 - \sum_{B \cap C \neq \emptyset} m_1(B) \cdot m_2(C)}\right) \\
 &= -\log\left(1 - \sum_{B \cap C = \emptyset} m_1(B) \cdot m_2(C)\right)
 \end{aligned} \tag{1.20}$$

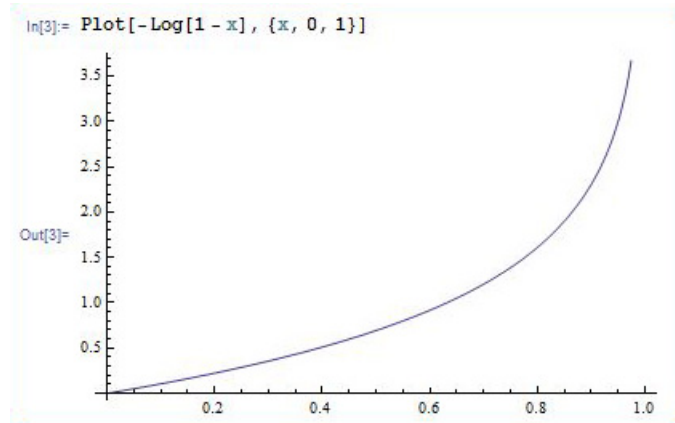


Figura 1.10: Funzione di conflitto

Da come si può evincere dalla figura 1.10 la funzione $Con(Bel_1, Bel_2)$ può assumere un valore che può variare tra zero ed infinito $Codom_{Con} \in [0, \infty]$ con un dominio $Dom_{Con} \in [0, 1]$. In particolare si osserva che:

$$\begin{aligned}
 Con(Bel_1, Bel_2) \rightarrow 0 & \quad \text{per} \quad \sum_{B \cap C = \emptyset} m_1(B) \cdot m_2(C) \rightarrow 0 \quad \leftarrow \text{assenza conflitto} \\
 Con(Bel_1, Bel_2) \rightarrow \infty & \quad \text{per} \quad \sum_{B \cap C = \emptyset} m_1(B) \cdot m_2(C) \rightarrow 1 \quad \leftarrow \text{alto conflitto}
 \end{aligned} \tag{1.21}$$

E' chiaro che la regola di combinazione delle masse può essere applicata a qualsiasi elemento del Power Set. Le proprietà algebriche di cui gode tale regola sono la Commutatività e l'Associatività.

1.3.2 Le insidie della Regola di Dempster

A causa della presenza della costante di renormalizzazione K , la regola di combinazione delle masse di Dempster (DS) può portare a dei risultati che possono trarre in inganno. Il risultato poco intuitivo è la conseguenza diretta di ignorare il conflitto e confinarlo nell'insieme vuoto. Tuttavia, quando questa situazione si presenta, in casi in cui il conflitto tra le varie sorgenti del sistema è massimo, tale strategia risulta poco efficiente o per lo meno non va applicata in maniera così sconsiderata (ovvero che non considera il conflitto). L'insieme di questi risultati devono essere quindi attentamente studiati e valutati onde evitare spiacevoli sorprese legate al fatto di trascurare la potenziale presenza di conflitto tra le diverse fonti di informazione. A tale proposito consideriamo il seguente classico esempio:

	M_2		
M_1		$m_2(tr) = 0.99$	$m_2(tu) = 0.01$
$m_1(m) = 0.99$		0.9801	0.0099
$m_1(tu) = 0.01$		0.0099	0.0001

esempio: Si consideri un paziente per il quale 2 dottori hanno diagnosticato delle patologie differenti in base alla natura dei suoi sintomi. Il primo dottore sostiene che il paziente ha una probabilità del 99 % di avere una Meningite ed una probabilità del 1 % di avere un Tumore al cervello. L'altro invece sostiene che in realtà il paziente soffre di una commozione celebrale con il 99 %, ma lascia un margine dell 1 % di un Tumore al cervello.

$\mathbf{m(X)} = \{\text{meningite, tumore, trauma}\}$

$$\begin{aligned} m_1(\text{meningite}) &= m_1(m) \\ m_1(\text{tumore}) &= m_1(tu) \\ m_2(\text{trauma}) &= m_2(tr) \\ m_2(\text{tumore}) &= m_2(tu) \end{aligned}$$

$$m_{12}(tu) = \frac{m_1(tu) \cdot m_2(tu)}{K} = \frac{0.0001}{0.0001} = 1. \quad (1.22)$$

$$K = 1 - \overbrace{(0.9801 + 0.0099 + 0.999)}^{\sim 1} = (0.0001)$$

La proposizione di tumore celebrale risulta l'unica intersezione (unico accordo e quindi l'unica massa diversa da zero sarà $m_{12}(tu)$). Applicando la regola di combinazione delle masse di DS vediamo che la funzione Belief relativa al tumore celebrale assume il valore 1. Quindi secondo la DSCR (Dempster-Shafer Combination Rule) non vi sono dubbi che il paziente abbia un tumore al cervello. Risulta chiaro che se analizziamo le prove a nostra disposizione questa conclusione risulta errata o per lo meno ha diverse chiavi di lettura. In questo caso stiamo riponendo la nostra completa fiducia sull'unica diagnosi in comune tra i due medici, sebbene entrambe le fonti gli attribuiscono poca importanza. Inoltre si osserva che il secondo termine di K tende ad uno, sottolineando che il conflitto è alto.

Quindi dall'esempio precedente abbiamo visto che il presentarsi di questa trappola può portarci a delle conclusioni avventate; per tale motivo sono state proposte in letteratura varie soluzioni per affrontare questa problematica. Nel paragrafo successivo studieremo il metodo di Yager.

1.4 La Revisione di Yager

Come abbiamo potuto constatare dall'esempio precedente, l'applicazione della DSCR può portare a delle conclusioni errate. Quindi per evitare queste trappole sono state proposte varie modifiche; una di queste modifiche è stata apportata da Ronald R. Yager, il quale ha proposto una classe di OPERATORI UNBIASED. Ovvero Operatori che ci consentono di ottenere una stima NON POLARIZZATA delle masse che non risenta quindi di opportune deviazioni legate alla presenza di conflitto nel sistema.

Fondamentalmente Yager sosteneva che la DSCR presentava due punti deboli:

1. Il primo problema riguarda la fase di aggiornamento delle masse del sistema valutando l'arrivo di ulteriori prove. Infatti, seguendo la DSCR è necessario RICALCOLARE COMPLETAMENTE le Basic Probability Assignments del Power set, le quali dipendono dall'arrivo di nuove informazioni. Questo aspetto è legato alle PROPRIETA' NON ASSOCIATIVE della Funzione Bpa; Di conseguenza Yager ha sviluppato una regola di combinazione delle masse che ricorre all'utilizzo di OPERATORI QUASI-ASSOCIATIVI. (Questo concetto lo riprenderemo più avanti)
2. Inoltre Yager ha proposto un Metodo alternativo, denominato appunto Yager's Rule, per eliminare l'effetto nocivo dovuto al verificarsi di situazioni in cui il conflitto risulti significativo.

1.4.1 Operatori Quasi-Associativi

Quando vengono combinate più informazioni provenienti da diverse sorgenti (DATA FUSION), spesso uno dei principali requisiti è la possibilità di aggiornare continuamente l'output in funzione dei nuovi dati, senza ricalcolare completamente i parametri del sistema. Questa possibilità è fattibile, se l'Operatore coinvolto nella fase di aggiornamento (detta anche UPDATING) risulti associativo.

A tale proposito adotteremo il simbolo \diamond per identificare un'operatore binario ed X un'insieme di elementi. L'operatore \diamond gode della proprietà associativa se (come abbiamo mostrato nei paragrafi precedenti):

$$\alpha \diamond (\beta \diamond \delta) = (\alpha \diamond \beta) \diamond \delta \quad \forall \alpha, \beta, \delta \in X. \quad (1.23)$$

Siano $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$ gli elementi di X , ovvero gli operandi su cui applichiamo l'operatore.

$$\begin{aligned} x &= x_1 \diamond x_2 \diamond \dots \diamond x_n \\ d &= \overbrace{x_1 \diamond x_2 \diamond \dots \diamond x_n}^x \diamond x_{n+1}. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Questa proprietà mostra come sia possibile aggiornare l'informazione in un Data Fusion System, in modo semplice ed efficiente. Compresa quindi l'importanza che gioca questa proprietà, occorre risolvere il problema che risulta piuttosto frequente nella maggior parte dei sistemi reali; ovvero gli operatori coinvolti non sono in generale associativi. Tuttavia, Yager non si è scoraggiato; infatti ha constatato che sebbene questo sia vero in generale è possibile esprimere alcuni di questi operatori Non-Associativi come operatori QUASI-ASSOCIATIVI.

In sostanza, un'operatore QUASI-ASSOCIATIVO si comporta bene o male come un'operatore associativo quando deve essere considerata dell'informazione aggiuntiva. A questo punto occorre introdurre un'altro pò di simbologia per identificare un'operatore QUASI-ASSOCIATIVO Ψ ; Yager adotta la seguente notazione per definire un QUASI-ASSOCIATIVE OPERATOR:

$$x_1 \Psi x_2 \Psi \dots \Psi x_n = T(x_1 \diamond x_2 \diamond \dots \diamond x_n). \quad (1.25)$$

Dove T viene chiamato NORMALIZATION MAPPING. Il modo più semplice per interpretare l'equazione appena definita, è quello di dire semplicemente che abbiamo un'insieme di operatori non-associativi, i quali però possono essere scomposti in più operatori Sub-associativi. Uno tipico Operatore che rientra in tale categoria è quello della Media Aritmetica che lo indicheremo brevemente con il simbolo \bar{y} . La Media Aritmetica di per sè è un'operatore NON-Associativo, ovvero non è possibile calcolare la nuova media semplicemente dividendo la somma ottenuta dalla media dei campioni precedenti ed il nuovo campione con il numero totale dei campioni;

questo naturalmente darebbe luogo ad un risultato privo di significato che non riflette il valore reale della media degli $n+1$ campioni:

$$\begin{aligned} ? &= \frac{\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} + x_{n+1}}{n+1} \\ &= \frac{\bar{y}_n + x_{n+1}}{n+1} \end{aligned}$$

Che cosa ci porta fuori strada ?

Se non fosse per l'operazione di divisione al numeratore per (n) avrei il risultato corretto della media sugli $n+1$ campioni. Infatti, se sommiamo il nuovo campione alla somma dei campioni precedenti:

$$x_1 \diamond x_2 \diamond \dots \diamond x_n \diamond x_{n+1} = x_1 + x_2 + \dots + x_n + x_{n+1}.$$

E lo dividiamo per il numero complessivo dei campioni, otteniamo esattamente $\overline{y_{n+1}}$. Allora questa operazione di divisione sarebbe un NORMALIZATION MAPPING e l'operazione di media aritmetica sarebbe quasi-associativa. In altre parole il normalization mapping è l'operazione che rende il mio operatore quasi-associativo, infatti se alla definizione dell'operatore di media aritmetica gli togliessimo l'operazione di divisione avremmo semplicemente una serie di somme che darebbe luogo ad un'operatore associativo. Quindi utilizzando la notazione adottata da Yager possiamo esprimere l'operatore di media aritmetica come una serie di operatori sub-associativi (ovvero le somme) ed un'operazione di normalizzazione.

$$\bar{y} = T \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)$$

sostituendo il simbolo T si ha:

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i$$

Sebbene l'esempio considerato sia semplice, esso mette in evidenza il vantaggio di utilizzare un'operatore di questo tipo rispetto ad un'operatore non-associativo. Tale operatore mi consente quindi di trasformare (mapping) il comportamento dell'operatore non-associativo in quello di un'operatore associativo. E' come se nell'effettuare il calcolo della media aritmetica, prima di effettuare l'operazione di divisione, mi salvassi da qualche parte il risultato della somma per utilizzarlo successivamente per calcolare la media del campione successivo, o se vogliamo l'operazione che mi trasforma l'operatore di media in un'operatore associativo è la moltiplicazione. Infatti si ha che:

$$\overline{y_{n+1}} = \frac{n \cdot \bar{y}_n + x_{n+1}}{n+1}$$

Ora lo step successivo sarà quello di utilizzare la stessa tecnica per la Regola di combinazione delle masse di Dempster and Shafer.

1.4.2 Il Framework Quasi-Associativo nella Regola di Dempster

Abbiamo visto che la Quasi-Associatività è legata alla possibilità di scomporre l'operatore in sotto operazioni associative. Attraverso il concetto di operatore Quasi-Associativo, Yager ha sviluppato una struttura di base

generale, da utilizzare nella Regola di combinazione delle masse, dove in questo caso gli operatori presi in considerazione sono quelli insiemistici e pertanto avremo a che fare con dei sottoinsiemi propri. Prima però di procedere nella nostra analisi è necessario richiamare la Regola di combinazione delle masse di Dempster:

$$m_{12} = \frac{\sum_{B \cap C = A} m_1(B) \cdot m_2(C)}{1 - \sum_{B \cap C = \emptyset} m_1(B) \cdot m_2(C)}$$

Questo Operatore, analogamente alla Media Aritmetica, può essere Costruito a partire da operatori Sub-Associativi. Yager definisce il seguente Operatore SUB-ASSOCIATIVO:

$$q(A) = \sum_{\substack{B_i, C_i \\ B_i \cap C_i = A}} [m_1(B) \cdot m_2(C)]. \quad (1.26)$$

La combinazione delle massa definite da questo operatore, prende il nome di Ground Probability Assignment, che descriveremo in maggiore dettaglio nel paragrafo successivo. A partire da questa definizione possiamo riformulare la Regola di Dempster nel modo seguente:

$$m(A) = T(q(A)) \quad (1.27)$$

In questo caso l'operatore T di NORMALIZATION MAPPING è PARI ALLA NORMALIZZAZIONE DEL CONFLITTO. Ovvero:

$$m(A) = \overbrace{\left(1 - \sum_{B \cap C = \emptyset} m_1(B) \cdot m_2(C)\right)^{-1}}^K \cdot q(A) \quad (1.28)$$

Ricordo che K fornisce una misura della quantità di conflitto esistente nel sistema ed è una funzione che dipende dalle masse dei sottoinsiemi disgiunti tra le sorgenti di informazione. Per mettere in evidenza questo aspetto Yager utilizza la seguente notazione:

$$q(\emptyset) = \sum_{B \cap C = \emptyset} m_1(B) \cdot m_2(C) \quad (1.29)$$

$$K = (1 - q(\emptyset))^{-1} \quad (1.30)$$

Quindi la relazione diventa:

$$m(A) = \frac{q(A)}{1 - q(\emptyset)} \quad (1.31)$$

Sebbene la regola di combinazione delle masse di Yager non è associativa, LA STRUTTURA DI BASE ottenuta dalle combinazioni delle masse $q(A)$ può essere utilizzata per prendere in considerazione un numero arbitrario di pezzi di informazione (prove) (Analogamente al ruolo che gioca la somma complessiva dei campioni nell'operazione di media aritmetica). Supponiamo che $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$ siano le Basic Probability assignments delle n Belief Structures. Sia inoltre F_i l'insieme degli elementi focali associati alla i-esima struttura di

belief (m_i) che sono sottoinsiemi dell'insieme universale X . Indichiamo con A_i un generico elemento dell'insieme focale F_i ; Allora la Combinazione delle n Basic Probability Assignment Structure è data da:

$$q(A) = \sum_{\bigcap_{i=1}^n A_i = A} m_1(A_1) \cdot m_2(A_1) \cdot \dots \cdot m_n(A_n). \quad (1.32)$$

$$q(\emptyset) = \sum_{\bigcap_{i=1}^n A_i = \emptyset} m_1(A_1) \cdot m_2(A_1) \cdot \dots \cdot m_n(A_n). \quad (1.33)$$

Mediante la proprietà di Quasi-Associatività che descrive Yager, la struttura combinata $q(A)$ può essere aggiornata a partire dalle nuove prove. Questa operazione viene realizzata combinando la Ground Probability Assignment associata alla nuova prova e la Ground Probability Assignment associata alla combinazione esistente ottenuta in precedenza e successivamente convertendo la Ground Probability Assignment in una Basic Probability Assignment che analizzeremo nel paragrafo successivo. (Per il momento possiamo immaginare queste operazioni come la somma dei campioni precedenti con il nuovo campione e l'operazione di trasformazione è quella della divisione per il numero totale dei campioni).

Quindi, la Modifica apportata da Yager alla Regola di combinazione di Dempster risolve per il momento solo il problema del Updating, evitando ogni volta di ricalcolare completamente le Bpa del Power Set. Nel paragrafo successivo affronteremo il secondo aspetto vulnerabile della Dempster's Rule, ovvero il Problema di gestione del conflitto, mil quale ci aiuterà a capire come passare dalla ground probability assignment alla Basic probability Assignment.

1.4.3 Regola di Combinazione di Yager

La trasformazione della DSCR in un'operatore Quasi-Associativo costituisce solo una parte del lavoro di Yager; in effetti il suo scopo principale non era tanto quello di rendere computazionalmente efficiente il calcolo della bpa, ma era quello di apportare delle modifiche sufficienti a garantire che la presenza di conflitto nel sistema non portasse a dei risultati contraddittori. Infatti il suo lavoro parte da questa problematica e solo successivamente ha portato a risolvere il problema dell'Update.

Il concetto base su cui si fonda la regola di Yager è la distinzione tra la basic probability mass assignment (m) e la Ground probability mass assignment (indicata con q). Questo termine è stato già introdotto in modo informale nel paragrafo precedednte riguardo alla fase di Update, vediamo adesso cosa implica da un punto di vista concettuale. Analogamente alla Basic probability mass assignment la **Ground Probability Mass Assignment (Gpma)** è una funzione che effettua un Mapping tra gli elementi del Power Set ed l'intervallo dei numeri reali compresi tra zero ed uno:

$$q : P(X) \rightarrow [0 \ 1] \quad (1.34)$$

In particolare le due relazioni che la definiscono sono:

$$Gpma \begin{cases} q(A) = \sum_{B \cap C = A} m_1(B) \cdot m_2(C) \\ q(\emptyset) = \sum_{B \cap C = \emptyset} m_1(B) \cdot m_2(C) \end{cases} \quad (1.35)$$

In sostanza scompone il corpo delle prove di Base (Ground) in due categorie una legata alle prove consistenti del sistema $q(A)$ ed un'altra relativa alla parte conflittuale $q(\emptyset)$. A partire da questa distinzione assegna le masse agli elementi del Power Set effettuando le seguenti trasformazioni che legano la Bpa (m) del Dominio di Yager alla Gpa (q).

$$\begin{aligned} m^Y(\emptyset) &= 0 \\ m^Y(X) &= q(X) + q(\emptyset) \\ m^Y(A) &= q(A) \end{aligned} \quad (1.36)$$

Dove X rappresenta l'insieme Universale.

A questo punto si comprende il motivo per cui Yager abbia utilizzato successivamente la Gpma per effettuare l'Update del sistema. Comunque l'idea di base è quella di lavorare in un dominio trasformato attraverso il quale filtrare le informazioni base del sistema per poi passare alle Bpa del sistema. Infatti l'aspetto chiave è il differente modo in cui gestisce il conflitto rispetto alla Regola di Dempster. Come abbiamo visto Dempster moltiplica quella che Yager definisce la Gpa per la costante di Renormalizzazione (K), rimuovendo in tal modo il conflitto del sistema. Invece Yager non trascura la quantità di massa legata al conflitto tra le sorgenti, ma l'aggiunge all'insieme Universale, il cui valore può essere interpretato come il livello di Ignoranza che si ha nel sistema. In altre parole piuttosto che ignorare completamente il conflitto (come fa Dempster che non la considera un'informazione significativa per il sistema) Yager ne tiene traccia aumentando il livello di Ignoranza, o detto in altri termini di Incertezza, trovata nel sistema. Va comunque sottolineato che La Basic Probability Assignments della Regola di Yager (m^Y) non è la stessa di quella di Dempster (m). Yager fornisce la REGOLA DI TRASFORMAZIONE TRA LA GROUND ASSIGNMENT E LA DEMPSTER'S RULE nel seguente modo:

$$\begin{aligned} m(\emptyset) &= 0 \\ m(X) &= \frac{q(X)}{1 - q(\emptyset)} \\ m(A) &= \frac{q(A)}{1 - q(\emptyset)} \quad A \neq \emptyset, X. \end{aligned} \quad (1.37)$$

Da qui risulta immediato verificare che entrambe le Regole di combinazione conducono al medesimo risultato nel caso in cui non esiste conflitto ($K=1$ e $q(\emptyset) = 0$ all'interno del sistema, in quanto $m(X) = q(X)$ e $m(A) = q(A)$). Viceversa, se la presenza del conflitto è massima, la Regola di Dempster non può essere utilizzata e la regola di Yager crea una VACUOUS BELIEF STRUCTURE. Ovvero letteralmente una struttura in cui la Belief del sistema si svuota. Tornando all'analogia dei paragrafi iniziali è come se avessimo riempito nuovamente il serbatoio dell'energia potenziale legato alla Plausibility. Per essere più formali possiamo definire una Vacuous Belief Structure come un sistema in cui assegno 1 all'insieme universale e 0 alla Ground Probability Assignment. In sostanza è un sistema in cui esiste solo Ignoranza (Totale Incertezza).

In sintesi, le caratteristiche importanti della regola di combinazione di Yager sono le seguenti:

	M_2		
M_1		$m_2(tr) = 0.99$	$m_2(tu) = 0.01$
$m_1(m) = 0.99$		0.9801	0.0099
$m_1(tu) = 0.01$		0.0099	0.0001

1. L'introduzione del concetto generale di operatori Quasi-Associativi e l'estensione della Regola di base di combinazione delle masse e l'Updating della prova dove gli operatori non associativi sono un sottoinsieme proprio degli operatori quasi-associativi.
2. L'introduzione del concetto di Ground Probability assignment Functions (q) e la relazione che essa ha con la Basic Probability Assignments (m^Y) associata alla regola di combinazione delle masse di Yager (Dove va sottolineato che nel dominio di Yager non viene effettuata la normalizzazione) e con la Basic Probability Assignments (m) associata alla regola di Dempster.
3. La regola non filtra (ovvero elimina) o altera le prove consistenti attraverso l'operazione di normalizzazione.
4. L'assegnazione della massa relativa al conflitto all'insieme Universale X invece dell'insieme vuoto \emptyset . Perciò la massa associata al conflitto viene interpretata come il livello di Ignoranza che si ha nel sistema.
5. Le proprietà Algebriche di cui gode la Regola di Yager sono la Commutatività e Quasi-Associatività, ma non soddisfa la proprietà di Idempotenza e continuità.

Per vedere una semplice applicazione di questa regola di combinazione delle masse, riprendiamo l'esempio relativo alla diagnosi della malattia da attribuire al paziente.

Calcoliamo la Ground Probability Assignment:

$$q(\emptyset) = 0.9801 + 0.0099 + 0.999 = 0.9999$$

$$q(A) = 0.0001.$$

Calcoliamo ora le corrispondenti masse:

$$\begin{aligned} m(\emptyset) &= 0 \\ m(A) &= 0.0001 \\ m(X) &= 0.9999 \end{aligned}$$

L'ipotesi che il paziente abbia un tumore al cervello ha una belief complessiva di 0.0001 mentre il livello di completa ignoranza è pari al 0.9999. Come è ragionevole attendersi dalle prove sostenute dai due medici. Questo risultato quindi può suggerire di fare un'ulteriore ricerca oppure analisi per valutare la causa dei sintomi presentati dal paziente.

1.5 Closed World and Smets's Open World Hypothesis

Da quanto abbiamo potuto constatare dai casi precedenti, le uscite ottenute da differenti regole di combinazione delle masse in generale non portano agli stessi risultati.

In particolare questo dipende dalla scelta soggettiva di come gestire il conflitto presente nel sistema; o per essere più precisi, su come viene ridistribuita la massa dell'insieme vuoto $q(\emptyset)$ tra gli insiemi presenti nel Power Set. Dove ricordo:

$$q(\emptyset) = \sum_{A \cap B = \emptyset} m_1(A) \cdot m_2(B)$$

Sulla sponda diametralmente opposta **Smets** attribuisce un significato particolare alla massa dell'insieme vuoto $m(\emptyset) = q(\emptyset)$, che modella appunto il conflitto presente all'interno del sistema. Risulta evidente che in questa circostanza, tale massa non viene ridistribuita tra gli elementi del Power Set, poichè dice che prendiamo in considerazione un '*Open World*', dove potrebbero risiedere ipotesi sconosciute che abbiano potuto scatenare tale conflitto.

Mentre nel caso di **Yager** tale massa viene assegnata all'insieme Universale per evidenziare un'ignoranza legata alla non conoscenza delle cause che abbiano dato luogo a tale conflitto; ripiegando però la convinzione che esse risiedano da qualche parte nel Power Set. Pertanto ritiene che il *frame of discernment* risulti esaustivo per la nostra realtà d'interesse (*Closed World*).

In fine **Dempster** preferisce ridistribuire la quantità di massa residua dell'insieme vuoto in modo proporzionale alle masse risultanti dalla regola di combinazione congiuntiva. In modo da assegnare maggior credito alle prove che risultino più consistenti all'interno del sistema. Questo, tuttavia può portare a delle situazioni contraddittorie quando la quantità di conflitto non è trascurabile. Pertanto lievi perturbazioni dei valori delle masse può dar luogo a delle belief structure completamente differenti. Inoltre a causa della presenza del fattore di Normalizzazione ha anche problemi legati all'instabilità numerica che vengono comunque in parte superati dalla soluzione di Updating proposta da Yager, che ci consente di non portarci dietro gli errori di arrotondamento dovuti all'operazione di divisione. Comunque anche questo metodo rientra nell'ipotesi del (*Closed World*).

Possiamo quindi dividere i metodi generali in due grandi categorie.

1. Una basata sull'ipotesi dell' **Open World** come la **Smets's Rule of Combination**
2. Un'altra fondata sull'ipotesi del **Closed World**, come la **Dempster's Rule** e la **Yager's Rule**.

L'assunzione di Smets viene generalmente impiegata quando il frame of discernment non è esaustivo, per cui vi possono essere delle valide ragioni per cui gli eventi considerati non risultano sufficienti per descrivere il fenomeno osservato. Si consideri ad esempio il lancio di una moneta. In questo caso l'insieme universale X che corrisponde alla proposizione: *La moneta mostra una delle due faccie*, è caratterizzato da $\text{Bel}(X) = \text{Pl}(X)=1$; tuttavia questa assunzione che diamo per scontata, in realtà potrebbe essere messa in discussione. Infatti la moneta potrebbe rotolare in un chiusino, restare in bilico oppure sparire magicamente (anche se è difficile ma non impossibile). Quindi se adottiamo il punto di vista dell'Open-World, il complemento dell'insieme X è \emptyset , che in questo caso non rappresenta l'evento impossibile. Per cui risulta $m(\emptyset) \geq 0$, ovvero:

$$P(\emptyset) + P(T) + P(C) + P(X) = 1, P(\emptyset) \geq 0.$$

Ora noi concentreremo la nostra attenzione sulla seconda categoria di problemi ($m(\emptyset) = 0$). In particolare, colui che analizzò nel dattaglio l'operazione di redistribuzione della massa dell'insieme vuoto fu **Toshiyuki Inagaki**.

In particolare egli mise in evidenza come a seconda del tipo di applicazione, i risultati ottenuti dalle differenti regole di combinazione possono comportare conseguenze estremamente differenti tra loro sul piano pratico. Inagaki ha mostrato la validità di questa osservazione nell'articolo *Interdependence Between safety-control policy and multiple-sensor schemes via Dempster-Shafer Theory*. I sistemi utilizzati nell'analisi di Inagaki erano dei processi molto complessi quali reattori nucleari e vettori spaziali, dove le decisioni erano prese tra operazioni continue ed interruzioni di sicurezza del sistema.

Prima però di addentrarci nella vicenda dell'articolo, occorre capire il modello adottato da Inagaki che prende il nome di **Unified Combination Rule**.

1.5.1 Unified Combination Rule

La questione fondamentale che aveva sollevato Inagaki e che risultava inizialmente alquanto ambiziosa, era quella di fornire un modello generale che racchiudesse tutte le possibili regole di combinazione presenti nel Power Set, sotto l'ipotesi vincolante che il Power Set fosse un mondo chiuso ovvero **Closed World Hypothesis**.

Ovvero, invece di stabilire delle relazioni fisse che legano la massa dell'insieme vuoto con i corrispondenti insiemi del Power Set, come ad esempio quelle definite da Dempster e Yager; Inagaki aveva proposto un'espressione di carattere più generale che fosse in grado di passare da una regola di combinazione all'altra. In particolare Inagaki sfrutta il vantaggio di utilizzare la ground probability assignment function introdotta da Yager, per definire una classe di funzioni parametrizzate, caratterizzate dalla combinazione di operazioni che fanno rientrare come casi particolari la regola di Dempster e quella di Yager.

In sostanza Inagaki era partito dalla seguente riflessione:

Il passaggio dalla *Conjunctive Combination Rule* all'Assegnazione delle masse (m) ai vari insiemi del Power Set è univocamente determinata una volta che sia stato stabilito uno schema generale per distribuire $q(\emptyset)$ alle proposizioni che ovviamente risultano differenti da essa. Alla luce di questa considerazione possiamo quindi individuare l'insieme di tutte le possibili regole di combinazione valide all'interno del Power Set attraverso la seguente espressione:

$$\mathbf{m}(\mathbf{C}) = \overbrace{\mathbf{q}(\mathbf{C})}^{\text{evidence}} + \overbrace{\mathbf{f}(\mathbf{C})}^{\text{scaling}} \cdot \overbrace{\mathbf{q}(\emptyset)}^{\text{conflict}} \quad (1.38)$$

$$\sum_{C \subset X; C \neq \emptyset} f(C) = 1, \quad f(C) \geq 0.$$

In questa equazione la funzione \mathbf{f} (che dipende da \mathbf{C} : ovvero dallo specifico insieme del Power Set che sto considerando) può essere interpretata come una **scaling function**, ovvero che ridimensiona il valore di $q(\emptyset)$ da assegnare agli elementi del Power Set. In sostanza la **bb**a finale è ottenuta considerando, sia il contributo legato alle prove evidenti legate alla Conjunctive Combination Rule il cui valore è indicato con $\mathbf{q}(\mathbf{C})$ e sia da quanta massa di $q(\emptyset)$ ho deciso di attribuire a \mathbf{C} . Questa decisione è legata alla scelta della funzione $\mathbf{f}(\mathbf{C})$, la quale può essere interpretata come una sorta di funzione di distribuzione della massa di $q(\emptyset)$.

Comunque l'ipotesi di partenza su cui si basa il modello parametrico di Inagaki è fondato sull'ipotesi del Closed World. Egli reputava ragionevole limitare l'attenzione sulla classe delle Regole di Combinazione delle

Masse per la quale valesse la seguente proprietà (Che io definirei personalmente la Closed World Property):

$$\frac{\mathbf{m}(\mathbf{C})}{\mathbf{m}(\mathbf{D})} = \frac{\mathbf{q}(\mathbf{C})}{\mathbf{q}(\mathbf{D})} \quad \forall \mathbf{C}, \mathbf{D} \neq \emptyset, \mathbf{X} \quad (1.39)$$

Mantenendo costante il rapporto tra \mathbf{m} e \mathbf{q} , questa equazione dice che l'unica conoscenza che abbiamo del sistema è racchiusa nel Power Set $\{g(A) : A \subset X\}$ e non esistono ulteriori proposizioni che siano legate ad una 'Meta-Conoscenza' (Meta-knowledge) che mi 'faccia sconfinare dal Power Set'. Quindi non abbiamo un'ulteriore conoscenza della credibilità o affidabilità delle sorgenti/esperti del sistema.

Se ad esempio un'analista adotta un fattore di scala che pondera le prove sulla base di qualche conoscenza extra relativa alla credibilità delle sorgenti, in generale questo porterebbe a modificare il rapporto e quindi a violare l'identità. Come conseguenza di questo fatto che impone un vincolo alle Regole di Combinazione ed alla loro applicazione, le Regole individuate dal Modello di Inagaki possono essere utilizzate solo nelle situazioni in cui non si hanno informazioni relative alla credibilità o affidabilità delle sorgenti presenti nel sistema, e che quindi non possono essere 'condizionate da agenti esterni'. Risulta quindi chiaro che in tutta questa storia $m(\emptyset) = 0$ e ovviamente l'insieme di regole di combinazione rientrano nella classe della **Conjunctive Combination Rule**. Infatti ricordo che nel caso della Conjunctive Combination Rule si ripone completamente la fiducia sull'affidabilità di tutte le sorgenti del sistema, mentre la Disjunctive Combination Rule fa riferimento alla possibilità che qualcuna delle sorgenti non sia attendibile e che quindi sia condizionata da qualche ipotesi su cui si basa tale sospetto. Al contrario Smets lascia crescere il valore di $\mathbf{m}(\emptyset)$.

Comunque il rapporto tra le prove consistenti del sistema è equivalente al rapporto delle rispettive masse che gli verranno attribuite (una volta stabilito come distribuire la massa dell'insieme vuoto). In sintesi sia prima che dopo il passaggio dalla Conjunctive Combination Rule (che calcola la combinazione delle masse del sistema non normalizzata) all'assegnazione delle masse da attribuire agli insiemi del Power Set, questo rapporto rimane costante per ciascuna coppia di insiemi diversi da \emptyset . In altre parole la scelta della funzione $f(\mathbf{C})$ non va a violare questa identità, che si basa sul fatto che **l'unica conoscenza disponibile del sistema è la ground probability assignment**.

Quindi la **Unified Combination Rule** coglie gli aspetti migliori della regola di combinazione delle masse di Dempster e sia della Regola di Yager. In particolare il Mapping finale alla basic probability assignment (\mathbf{m}) (mediante l'operazione di normalizzazione) e l'utilizzo della ground probability.

Quindi a partire dal rapporto:

$$\frac{\mathbf{m}(\mathbf{C})}{\mathbf{m}(\mathbf{D})} = \frac{\mathbf{q}(\mathbf{C}) + \mathbf{f}(\mathbf{C}) \cdot \mathbf{q}(\emptyset)}{\mathbf{q}(\mathbf{D}) + \mathbf{f}(\mathbf{D}) \cdot \mathbf{q}(\emptyset)} = \frac{\mathbf{q}(\mathbf{C})}{\mathbf{q}(\mathbf{D})} \quad (1.40)$$

Otteniamo la seguente relazione:

$$\frac{\mathbf{q}(\mathbf{C}) + \mathbf{f}(\mathbf{C}) \cdot \mathbf{q}(\emptyset)}{\mathbf{q}(\mathbf{C})} = \frac{\mathbf{q}(\mathbf{D}) + \mathbf{f}(\mathbf{D}) \cdot \mathbf{q}(\emptyset)}{\mathbf{q}(\mathbf{D})} \quad (1.41)$$

Dalla quale si ricava la seguente proprietà:

$$\begin{aligned} \overbrace{\frac{q(C)}{q(C)}}^1 + \frac{f(C)}{q(C)} \cdot q(\emptyset) &= \overbrace{\frac{q(D)}{q(D)}}^1 + \frac{f(D)}{q(D)} \cdot q(\emptyset) \\ \frac{f(C)}{q(C)} \cdot q(\emptyset) &= \frac{f(D)}{q(D)} \cdot q(\emptyset) \\ \mathbf{k} = \frac{\mathbf{f}(C)}{\mathbf{q}(C)} &= \frac{\mathbf{f}(D)}{\mathbf{q}(D)}; \quad \forall C \neq X, \emptyset \end{aligned} \tag{1.42}$$

Dove \mathbf{k} è il parametro che rappresenta il conflitto e viene utilizzato per la normalizzazione delle masse. Vedremo che tale parametro deve essere opportunamente scelto in sede di progettazione.

Quindi, a partire dall'espressione generale 1.38 e dal vincolo 1.42, Inagaki ricava la sua regola di **combinazione unificata** indicata con $\mathbf{m}_k^u(C)$ (dove l'apice u sta per unified ed il pedice indica che è funzione del parametro k):

unified combination rule bba:

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_k^u(C) &= q(C) + f(C) \cdot q(\emptyset) \\ &= [1 + \frac{f(C)}{q(C)} \cdot q(\emptyset)] \cdot q(C) \\ &= [1 + \mathbf{k} \cdot \mathbf{q}(\emptyset)] \cdot \mathbf{q}(C) \quad \forall C \neq X, \emptyset \end{aligned} \tag{1.43}$$

universal set bba:

$$\mathbf{m}_k^u(X) = [1 + \mathbf{k} \cdot \mathbf{q}(\emptyset)] \cdot \mathbf{q}(X) + [1 + \mathbf{k} \cdot \mathbf{q}(\emptyset) - \mathbf{k}] \cdot \mathbf{q}(\emptyset). \tag{1.44}$$

parameter k values:

$$\mathbf{0} \leq \mathbf{k} \leq \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1} - \mathbf{q}(\emptyset) - \mathbf{q}(X)} \tag{1.45}$$

Per quanto riguarda la formula 1.43 risulta chiaro il procedimento che ci ha consentito di ricavare l'espressione finale; Ora analizziamo le relazioni 1.44 e 1.45.

Per quanto riguarda l'espressione della massa dell'insieme Universale X possiamo osservare che a partire dalla relazione 1.43 otteniamo la seguente equazione:

$$\frac{\mathbf{m}(C)}{\mathbf{q}(C)} = [1 + \mathbf{k} \cdot \mathbf{q}(\emptyset)]$$

Dove ricordo che $\mathbf{m}(C)$ è la massa assegnata a C e $\mathbf{q}(C)$ è il valore della combinazione delle masse non normalizzata. Quindi possiamo esprimere la massa dell'insieme universale nel modo seguente:

$$\mathbf{m}(X) = \frac{\mathbf{m}(C)}{\mathbf{q}(C)} \cdot q(X) + \left[\frac{\mathbf{m}(C)}{\mathbf{q}(C)} - k \right] \cdot q(\emptyset). \tag{1.46}$$

NB:

$$\frac{\mathbf{m}(C)}{\mathbf{q}(C)} \geq \mathbf{1} \quad \forall \mathbf{m}(C) \neq \mathbf{0}$$

Al di sotto di 1 non può andare poichè comunque ho la massa delle combinazioni non normalizzate.

Yager's Rule: Risulta chiaro che se è verificata la seguente relazione:

$$\frac{\mathbf{m}(\mathbf{C})}{\mathbf{q}(\mathbf{C})} = \mathbf{1} \quad \forall \mathbf{C} \subset \mathbf{X} \quad (1.47)$$

Vuol dire che la massa del conflitto non è stata distribuita ai sottoinsiemi dell'insieme Universale e quindi ci troviamo nel caso della regola di Yager. Su questa considerazione calcoliamo quindi il valore di \mathbf{k} in corrispondenza del quale otteniamo la Regola di Yager e verifichiamo il risultato ottenuto. Quindi andando a sostituire nella relazione 1.46 l'identità 1.47 otteniamo:

$$m(X) = q(X) + [1 - \mathbf{k}] \cdot q(\emptyset). \quad (1.48)$$

Ma chi è \mathbf{k} ?

$$\begin{aligned} \frac{\overbrace{m(\mathbf{C})}^1}{\cancel{q(\mathbf{C})}} &= \cancel{1} + \mathbf{k} \cdot q(\emptyset) \\ \mathbf{k} \cdot q(\emptyset) &= 0 \\ \mathbf{k} &= 0 \quad q(\emptyset) > 0. \end{aligned} \quad (1.49)$$

Quindi otteniamo per $\mathbf{k} = 0$ le masse non vengono normalizzate ed otteniamo la **Yager's Rule**:

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_0^u(\mathbf{C}) &= \left[1 + \overbrace{\mathbf{k} \cdot q(\emptyset)}^0 \right] \cdot q(\mathbf{C}) \quad \rightarrow \mathbf{q}(\mathbf{C}) \quad \mathbf{C} \neq X, \emptyset \\ \mathbf{m}_0^u(\mathbf{X}) &= \left[1 + \overbrace{\mathbf{k} \cdot q(\emptyset)}^0 \right] \cdot q(X) + \left[1 + \overbrace{\mathbf{k} \cdot q(\emptyset)}^0 - \overbrace{\mathbf{k}}^0 \right] \cdot q(\emptyset) \quad \rightarrow \mathbf{q}(\emptyset) + \mathbf{q}(\mathbf{X}) \end{aligned} \quad (1.50)$$

Dempster's Rule: la dimostrazione che la famiglia parametrizzata di Inagaki collassa in quella di Dempster è ottenuta a partire dal valore di \mathbf{k} che a noi risulta familiare. Infatti si ha:

$$\mathbf{k} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1} - \mathbf{q}(\emptyset)} \quad (1.51)$$

La quale rappresenta la costante di Renormalizzazione. Andiamo quindi a sostituire tale valore nella 1.44.

$$\begin{aligned} \mathbf{m}(\mathbf{C}) &= \left\{ 1 + \left[\frac{1}{1 - q(\emptyset)} \right] \cdot q(\emptyset) \right\} q(\mathbf{C}) \\ &= \left[\frac{1 - q(\emptyset) + q(\emptyset)}{1 - q(\emptyset)} \right] \cdot q(\mathbf{C}) \\ &= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1} - \mathbf{q}(\emptyset)} \cdot \mathbf{q}(\mathbf{C}) \end{aligned} \quad (1.52)$$

Per quanto riguarda l'insieme Universale risulta:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{m}(\mathbf{X}) &= \left\{ 1 + \left[\frac{1}{1 - q(\emptyset)} \right] \cdot q(\emptyset) \right\} \cdot q(X) + \left\{ 1 + \left[\frac{1}{1 - q(\emptyset)} \right] \cdot q(\emptyset) - \frac{1}{1 - q(\emptyset)} \right\} \cdot q(\emptyset) \\
 &= \frac{q(X)}{1 - q(\emptyset)} + \frac{\cancel{q(\emptyset)}}{1 - \cancel{q(\emptyset)}} - \frac{\cancel{q(\emptyset)}}{1 - \cancel{q(\emptyset)}} \\
 &= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1} - \mathbf{q}(\emptyset)} \cdot \mathbf{q}(\mathbf{X}).
 \end{aligned} \tag{1.53}$$

Nel caso di Dempster osserviamo che sia l'insieme Universale che gli elementi focali del Power Set vengono Normalizzati in ugual modo. (Ci troviamo in una situazione baricentrale)

1.5.2 Inagaki's Extra Rule

Nella sezione precedente siamo partiti da un'analisi in cui viene assegnata tutta la massa di $q(\emptyset)$ all'insieme Universale (Yager's Rule), poi siamo passati ad una situazione intermedia in cui normalizziamo assegnando la massa del conflitto in modo proporzionale al valore delle masse non normalizzate (Dempster's Rule); A questo punto risulta lecito porsi la seguente domanda:

E' possibile aumentare in modo indefinito il valore del parametro k ?

In realtà a questa domanda abbiamo già risposto studiando l'andamento della funzione di conflitto comunque è importante riprendere l'argomento per giustificare i Bounds relativi alla relazione 1.45.

Naturalmente non possiamo scegliere in modo del tutto arbitrario il valore della costante di normalizzazione k . Una considerazione di carattere generale che è alla base del modello di Inagaki è legata al fatto che stiamo considerando un Closed World Hypothesis, e quindi si deve rispettare il principio di conservazione della massa del sistema. Il quale ricordo dice sostanzialmente che la quantità complessiva della massa all'interno del Power Set deve essere pari ad uno ed il modo con cui viene ridistribuita la massa del $q(\emptyset)$ tra i vari sottoinsiemi ci fa passare da una belief structure ad un'altra. Nello specifico, il **Caso Estremo** si ottiene sulla sponda diametralmente opposta alla regola di Yager (che individua il Lower Bound di k); Ovvero nella situazione in cui non si assegna la massa del conflitto all'Insieme Universale. Questo risultato si ottiene quindi per:

$$\frac{\mathbf{m}(\mathbf{X})}{\mathbf{q}(\mathbf{X})} = \mathbf{1} \tag{1.54}$$

Questa relazione è verificata per il seguente valore di k :

$$k = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1} - \mathbf{q}(\emptyset) - \mathbf{q}(\mathbf{X})}. \tag{1.55}$$

Per mostrare la validità di questo Upper Bound, inseriamo tale valore nell'equazione 1.44, che per maggiore

chiarezza riportiamo di seguito:

$$\begin{aligned}
\mathbf{m}(\mathbf{X}) &= [1 + \mathbf{k} \cdot q(\emptyset)] \cdot q(X) + [1 + \mathbf{k} \cdot q(\emptyset) - \mathbf{k}] \cdot q(\emptyset) \\
&= \left[1 + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1} - \mathbf{q}(\emptyset) - \mathbf{q}(\mathbf{X})} \cdot q(\emptyset) \right] \cdot q(X) + \left[1 + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1} - \mathbf{q}(\emptyset) - \mathbf{q}(\mathbf{X})} \cdot q(\emptyset) - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1} - \mathbf{q}(\emptyset) - \mathbf{q}(\mathbf{X})} \right] \cdot q(\emptyset) \\
&= \frac{[1 - \cancel{q(\emptyset)} - q(X) + \cancel{q(\emptyset)}] \cdot q(X)}{1 - q(\emptyset) - q(X)} + \frac{[\cancel{1} - \cancel{q(\emptyset)} - q(X) + \cancel{q(\emptyset)} - \cancel{1}] \cdot q(\emptyset)}{1 - q(\emptyset) - q(X)} \cdot q(\emptyset) \\
&= \frac{q(X) - q(X)^2 - q(X) \cdot q(\emptyset)}{1 - q(\emptyset) - q(X)} \\
&= \frac{q(X) \cdot [1 - \cancel{q(X)} \cdot \cancel{q(\emptyset)}]}{1 - \cancel{q(X)} \cdot \cancel{q(\emptyset)}} \\
&= q(X) \\
\frac{\mathbf{m}(\mathbf{X})}{\mathbf{q}(\mathbf{X})} &= 1.
\end{aligned} \tag{1.56}$$

Calcoliamo adesso i valori che assumono gli altri focal elements in corrispondenza dell'Upper Bound di \mathbf{k} :

$$\begin{aligned}
\mathbf{m}(\mathbf{C}) &= [1 + \mathbf{k} \cdot q(\emptyset)] \cdot q(C) \\
&= \left[1 + \frac{\mathbf{q}(\emptyset)}{\mathbf{1} - \mathbf{q}(\emptyset) - \mathbf{q}(\mathbf{X})} \right] \cdot q(C) \\
&= \left[\frac{1 - \cancel{q(\emptyset)} - q(X) + \cancel{q(\emptyset)}}{1 - q(\emptyset) - q(X)} \right] \cdot q(C) \\
&= \frac{[1 - \mathbf{q}(\mathbf{X})]}{\mathbf{1} - \mathbf{q}(\emptyset) - \mathbf{q}(\mathbf{X})} \cdot \mathbf{q}(\mathbf{C}).
\end{aligned} \tag{1.57}$$

Dalle due relazioni precedenti otteniamo la Inagaki's Extra Rule.

Inagaki's Extra Rule:

$$\begin{aligned}
\mathbf{m}_{\mathbf{k}_{\text{ext}}}^{\mathbf{u}}(\mathbf{C}) &= \frac{[1 - \mathbf{q}(\mathbf{X})]}{\mathbf{1} - \mathbf{q}(\mathbf{X}) - \mathbf{q}(\emptyset)} \cdot \mathbf{q}(\mathbf{C}) \\
\mathbf{m}_{\mathbf{k}_{\text{ext}}}^{\mathbf{u}}(\mathbf{X}) &= \mathbf{q}(\mathbf{X}).
\end{aligned} \tag{1.58}$$

In questo caso si osserva che la normalizzazione viene effettuata considerando solo i focal elements del Power Set differenti dall'insieme Universale.

1.5.3 Parameter K operative Range

Attraverso le differenti regole di combinazione abbiamo constatato che il parametro \mathbf{k} viene utilizzato per effettuare la Normalizzazione ed il suo valore appartiene al seguente intervallo $\mathbf{k} \in [0 \ 1]$. In particolare il **denominatore di \mathbf{k}** svolge un'importante ruolo nella fase d'implementazione; Tuttavia non è stata ancora sviluppata in letteratura una procedura che giustifichi il valore da assegnare a \mathbf{k} .

Tamakao e Klir riportano la determinazione del valore da attribuire a k attraverso dei dati sperimentali, simulazioni oppure sulla base di valutazioni di un esperto nel contesto di una specifica applicazione. Inoltre forniscono un'esempio per determinare k ed il corrispondente effetto sulla massa \mathbf{m} nei sistemi di monitoraggio.

Inagaki quindi pone il problema di ottimizzazione per selezionare il valore di k idoneo, come un problema aperto. In particolare Inagaki discute le regole nel contesto di un sistema di *safety control policy* dove dimostra che i valori della belief e della plausibility sono una funzione di k e le conseguenze legate alla sua scelta.

Il valore di k influenza direttamente il valore della combinazione delle bpa ed abbiamo visto che sotto opportune condizioni collassa nel caso specifico della Regola di Yager, Dempster oppure in quella di Inagaki. Come si può vedere dalla figura 1.11 il parametro k da luogo ad un'intera classe di possibili Regole di combinazione parametrizzate che **interpolano ed estrapolano la Regola di Dempster**.

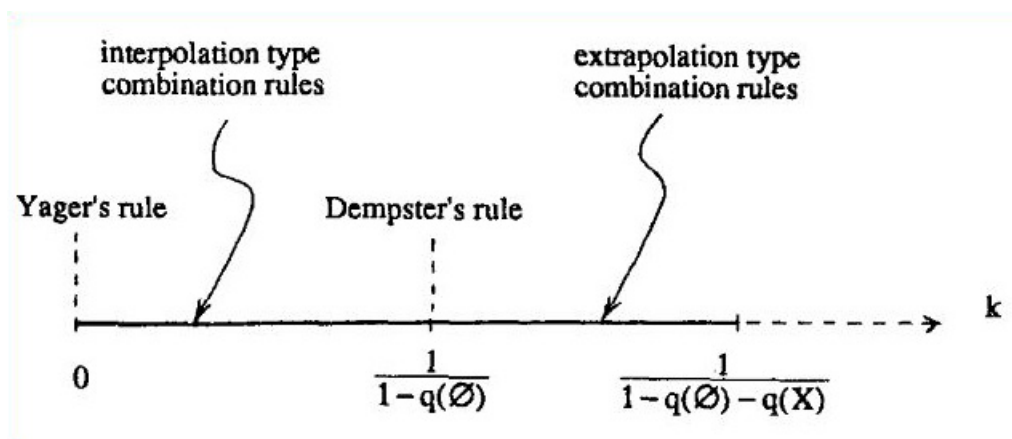


Figura 1.11: whole set of Combination Rule

L'unica Regola di combinazione di questa classe parametrizzata che risulta associativa è quella che corrisponde alla Regola di Dempster. Tutte le altre regole che rientrano in questa classe risultano commutative, sebbene non siano idempotenti o continue. Inagaki considera l'effetto della Non-Associatività nelle applicazioni ancora un problema di ricerca aperto.

Confrontando i risultati relativi alla Dempster's Combination Rule, Yager's Combination Rule e la Inagaki's Combination Rule risulta chiaro che la differenza sostanziale risiede sul modo in cui le prove vengono filtrate dal sistema. In pratica la scelta del parametro k fondamentale determina come **valutare preliminarmente la gestione dell'informazione relativa alla presenza del conflitto nel sistema** ed è limitato dall'intervallo di valori riportato in figura 1.11. Nello specifico si ha:

- **$k = 0$ Lower Bound:** In questa situazione si ha la regola di **Yager** che assegna il conflitto all'insieme Universale aumentando il suo valore numerico che rappresenta il livello di Ignoranza nel sistema, mantenendo inalterato il contributo delle prove consistenti.
- **$k = \frac{1}{1 - q(\emptyset)}$ Intermediate:** In questo caso abbiamo la regola di **Dempster** che non fa alcuna discriminazione dei focal elements del sistema, filtrando completamente il corpo delle prove ignorando totalmente il conflitto.

- $k = \frac{1}{1 - \mathbf{q}(\emptyset) - \mathbf{q}(\mathbf{X})}$ **Upper Bound:** In questa circostanza si ha la regola di **Inagaki** che filtra anch'essa le prove, però normalizzando rispetto sia al conflitto che all'ignoranza modellati rispettivamente dai due termini al denominatore (in altre parole ci sbilanciamo un pò nel valutare le nostre proposizioni) ma il grado di influenza legato all'operazione di scaling è determinato dall'entità dei valori di $\mathbf{q}(\mathbf{X})$ e $\mathbf{q}(\emptyset)$. Risulta evidente che considerazioni analoghe vengono fatte per la regola di Dempster dove l'unico termine che interviene è il conflitto.

Quindi k ha l'effetto di ridimensionare l'importanza del conflitto. A partire da una situazione piuttosto conservativa (Yager) fino ad arrivare ad una distribuzione baricentrale della massa in corrispondenza di Dempster, per arrivare in fine ad uno sgocciolamento maggiore dove l'insieme universale viene escluso, nella regola di Inagaki.

Come è stato fatto notare in precedenza, una procedura che giustifichi la selezione del valore di k piuttosto che un'altro è essenziale nell'implementazione di una specifica regola in un particolare contesto applicativo. Quindi è importante evidenziare che il valore di k non necessariamente deve essere pari ad uno dei valori specificati per le rispettive regole di combinazione; ma l'aspetto significativo di questo approccio è legato alla possibilità di poter **Tarare opportunamente** il suo valore a seconda del tipo di applicazione considerata. Ovviamente la scelta del valore corretto di k per specifiche classi di sistemi è ancora oggi un'argomento di Ricerca.

In sintesi i contributi principali della Regola di Inagaki possono essere riassunti:

1. L'utilizzo della Ground probability function introdotta da Yager, per sviluppare una classe parametrizzata di Regole di Combinazione che comprende come casi particolari la Regola di Yager(Lower Bound),Dempster(Baricentro) ed in fine Yager (Upper Bound).
2. Inagaki confronta ed ordina le 3 regole in funzione dei valori di m nello specifico contesto applicativo.

1.6 Interdependence between Safety-Control Policy and Multiple-Sensor

Nella gestione di impianti caratterizzati da un'elevato numero di variabili come ad esempio sistemi complessi quali:

- Centrali Nucleari
- Vettori Spaziali
- Processi Industriali
- Reti Elettriche
- etc . . .

Non è consigliabile controllare questi processi ipotizzando di avere una completa conoscenza del sistema.

In generale in alcuni situazioni siamo in grado di stabilire se l'impianto si trova in condizioni operative nominali di sicurezza oppure in situazioni critiche di funzionamento. Tuttavia, nella maggior parte dei casi non si hanno prove sufficienti per poter stabilire lo stato effettivo del sistema. In tali circostanze, una possibile

strada è quella di valutare soggettivamente lo stato del sistema attraverso delle proposizioni più generali del tipo: *'Siamo certi al 60 % che l'impianto è sicuro'*. Dove la proposizione **Plant is Safe** è data da una convinzione, o utilizzando il termine ormai a noi familiare di **Belief**, è pari a 0.6 relativo alla VERITA' di tale proposizione.

Se definiamo il **degree-of-belief** di una proposizione come la corrispondente probabilità che tale affermazione sia vera, risulta chiaro che essa non necessariamente rappresenta cosa in realtà pensiamo. Per aver un'idea di quanto detto si consideri la seguente situazione dove possiamo distinguere 2 possibili stati:

1. **Plant Safe**(Impianto Sicuro)
2. **Plant Un-Safe**(Impianto Non Sicuro)

Ora Supponiamo che sulla base delle informazioni a disposizione e della conoscenza del sistema, si faccia la seguente affermazione:

Il nostro impianto è Sicuro- con una probabilità 0.6.

Allora secondo il classico approccio Bayesiano siamo in qualche maniera costretti a concludere che *il nostro impianto non è sicuro con una probabilità 0.4*, anche se in realtà non abbiamo alcuna prova a sostegno di quest'ultima affermazione e per lo meno non abbiamo intenzione di esprimere il nostro giudizio sulla Non-Sicurezza dell'impianto. Come è stato più volte detto, questo approccio è una conseguenza diretta dell'Assioma di Additività della teoria delle probabilità e della nostra scelta degli stati.

Quindi il fatto di aver assegnato la **degree-of-belief** pari a 0.6 alla proposizione **Plant is Safe** è legata al fatto che non abbiamo prove sufficienti per stabilire al 100 % l'impianto sia sicuro. In altre parole, il rimanente 0.4 costituisce quello che io definirei il *livello di scetticismo* che l'impianto risulti sicuro oppure non sicuro, a causa della nostra ignoranza relativa allo stato operativo effettivo in cui si trova il sistema.

In sostanza la situazione può essere descritta da 2 Casi Estremi:

1. Se vengono fornite ulteriori prove che sostengono l'ipotesi che l'impianto non è sicuro, allora il restante 0.4 viene effettivamente assegnato allo stato **Plant Not Safe**.
2. Se invece abbiamo informazioni che rafforzino ulteriormente la nostra convinzione che l'Impianto sia Sicuro, allora quel 0.4 si andrebbe a sommare allo 0.6 pre-esistente in modo tale che la nostra degree-of-belief relativa a **Plant is Safe** diventi unitaria. Ovvero siamo sicuri al 100 %.

Abbiamo visto che un modo per affrontare situazioni nelle quali esistono diverse tipologie d'Ignoranza relative alla conoscenza del sistema oppure che riguardano l'interpretazione delle informazioni a disposizione, è quello di ricorrere alla **D-S Theory**. La **PrAf Probability assignment function** (definita per un certo numero di proposizioni) ci consente di lavorare in un dominio che presenta una struttura assiomatica meno rigida rispetto a quella Bayesian. Infatti, non siamo obbligati a rispettare l'assioma di Additività; il che come abbiamo visto limita molto il nostro livello di astrazione della realtà. La **PrAf** è una versione più generale della classica misura probabilistica ed è definita su uno spazio campione finito costituito da un numero finito di campioni. Tuttavia, la teoria della Probabilità non è un sottoinsieme proprio della D-S Theory. Infatti la PrAf non può sostituire la misura probabilistica per uno spazio campione infinito costituito da un numero infinito di campioni che possono essere numerabili oppure avere la potenza del continuo; o per lo meno non è stata ancora elaborata una teoria che al momento attuale consenta di generalizzare tale approccio nel caso continuo (in realtà ultimamente è stata proposta una soluzione da Dempster con gli hyper-Power Set).

La D-S Theory ha raggiunto la sua popolarità in svariati campi applicativi come: Intelligenza Artificiale, la Diagnostica Medica, target identification oppure nella valutazione dell'affidabilità e della gestione di un sistema, Tuttavia, ogni applicazione costituisce un campo d'indagine autonomo; un'uso non appropriato della D-S Theory può portare a peggiorare le prestazioni di un dato sistema. Inagaki dimostra la validità di questa osservazione studiando il caso di stabilire una politica di controllo per la sicurezza di un'impianto: **'Safety-Control Policy'**, nel quale dobbiamo decidere se:

Mantenere operativo l'impianto oppure disattivarlo-sulla base di eventuali informazioni imprecise fornite da **s sorgenti indipendenti**, dove tali sorgenti possono riguardare i convenzionali sensori, persone oppure delle loro combinazioni.

La questione fondamentale risiede nella Regola che stabilisce come combinare queste informazioni. Ovvero si tratta di definire **un'algoritmo per il Data-Fusion**.

Le due **Comb Rule** più comuni sono:

1. Dempster's Rule
2. Yager's Rule

La Dempster's CombRule abbiamo visto che può portare a dei risultati contraddittori e può presentare dei problemi di instabilità numerica che da luogo in presenza di situazioni di notevole conflitto a delle bba completamente differenti tra loro. Pertanto successivamente è stata proposta una regola alternativa da Yager che colma queste deficienze. Nello specifico nell'articolo di Inagaki viene affrontato il problema dell'applicabilità della D-S Theory nella scelta di una politica di controllo per la sicurezza degli impianti, nei quali l'informazione relativa ai possibili stati è fornita da s sorgenti indipendenti.

In particolare mostra che quando l'obiettivo è quello di mantenere l'impianto in condizioni operative di sicurezza non è possibile scegliere in modo del tutto arbitrario la combRule (Tra l'insieme di tutte quelle possibili).

Le politiche di controllo relative ad un'impianto possono ricadere in due principali categorie:

1. **Fault-Warning Safety Control Policy(FW)**(Segnalazione di una situazione imprevista) è una situazione nella quale si decide di bloccare l'impianto solo se si reputa che si trovi in uno stato non sicuro Plant Not Safe.
2. **Safety-Preservation Safety Control Policy(SP)**(Mantenimento della condizione operativa nominale di sicurezza) E' viceversa la situazione in cui l'impianto viene lasciato nella sua condizione operativa solo se si considera sicuro il Suo Stato. Plant Safe

Un'esempio di **Fault-Warning Safety Control Policy** è il lancio dello Space-Shuttle Challenger avvenuto nel 1986. Uno degli ingegneri del team aveva sconsigliato di far partire lo shuttle a causa dell'incertezza relativa alla risposta di Challenger alle cattive condizioni atmosferiche presenti al momento del lancio.(segnalazione di una situazione imprevista che secondo la FW avrebbe dovuto annullare il lancio) Tuttavia, ciò non voleva dire che lo shuttle non fosse in grado di affrontare le condizioni avverse o per lo meno non provava affatto che Challenger risultasse Non Sicuro per il lancio; e quindi fu lanciato.(infatti secondo la SP tale imprevisto non pregiudicava la buona riuscita dell'operazione e quindi è stata mantenuta la condizione operativa del lancio).

Se la **Safety-Preservation Safety Control Policy** non fosse stata seguita allora il lancio non sarebbe mai avvenuto.

In realtà, situazioni di questo genere le incontriamo quotidianamente; Ad esempio con avvisi o consigli del tipo: *'Non è una scelta saggia di partire con questo cattivo tempo'*. Però ciò non vuol dire necessariamente che non siamo in grado di intraprendere il viaggio. Quindi, la filosofia di fondo è quella che io definirei con la seguente frase sarcastica che sintetizza il nocciolo della questione:

'Non aver paura del Mondo..' Ovvero, come dice Inagaki: ***Occorre saper filtrare le informazioni o prove significative per la nostra realtà d'interesse.*** In particolare evidenzia che non esiste una Regola Universale da poter utilizzare in tutte le situazioni. Ad esempio per il case study da lui affrontato dimostra che per i casi:

- **Safety-Preservation Safety Control Policy** la regola di combinazione di *Yager* è reputata la migliore. (Poichè tendo a portare più tutto verso l'insieme universale e quindi consente la possibilità di mantenere la condizione operativa del sistema)
- **Fault-Warning Safety Control Policy** Dovrà essere definita una CombRule completamente differente, la cui esistenza è stata trovata attraverso la *Unified Comb Rule* di Inagaki. (Effettivamente nella gestione dell'impianto o sistema in generale spesso effettuare un'operazione di phase-out o comunque di blocco comporta notevoli costi, pertanto è una decisione piuttosto delicata da prendere e dipende dal contesto applicativo; in particolare la Inagaki's Extra rule tende a portare la massa più verso il basso diminuendo il livello di Plausibilità dell'insieme universale fino ad annullarlo)

Quindi in sostanza la **FW** basa le proprie decisioni sulla non sicurezza dell'impianto (ovvero se abbiamo un numero sufficienti di prove che reputano che l'impianto non sia sicuro allora lo disattivo); mentre la **SP** ha una visione più orientata alla sicurezza dell'impianto (ovvero se abbiamo sufficienti prove che sostengano la sicurezza dell'impianto allora lo tengo attivo)

1.6.1 Combination Rule and Safety-Control Policy

Per semplicità adottiamo la seguente notazione:

- **S**: Proposizione *Plant is Safe*
- **U**: Proposizione *Plant is Not Safe*

Si prenda quindi in considerazione il frame of-discrimination **X** costituito dalle due proposizioni S ed U. Ovvero:

- **X** = {**S**, **U**} : Proposizione *Non possiamo valutare se l'impianto è sicuro oppure non è sicuro.*

Supponiamo che nel nostro contesto applicativo ci vengano fornite dalle **s sorgenti indipendenti due insiemi di belief structures**: [1.12](#)

$$\{m_i(\mathbf{S}), m_i(\mathbf{U}), m_i(\mathbf{X})\} \quad i = 1, 2$$

$$\begin{aligned} m(\mathbf{S}) &= [1 + k \cdot q(\emptyset)] \cdot q(S) \\ m(\mathbf{U}) &= [1 + k \cdot q(\emptyset)] \cdot q(U) \\ m(\mathbf{X}) &= [1 + k \cdot q(\emptyset)] \cdot q(X) + [1 + k \cdot q(\emptyset) - k] \cdot q(\emptyset) \end{aligned} \quad (1.59)$$

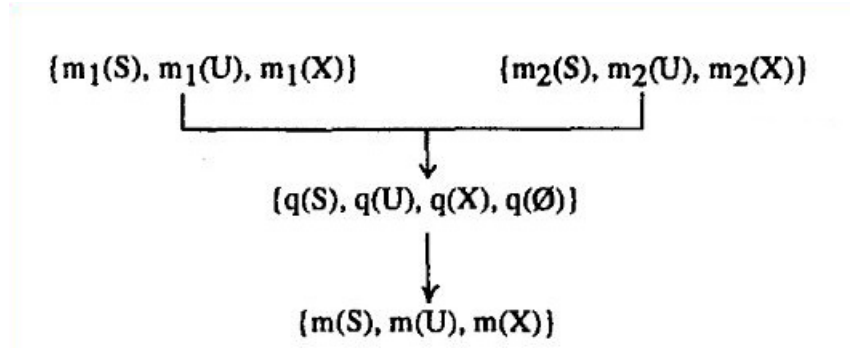


Figura 1.12: Process of Combining Two Belief-Structures

1.6.2 Fault-Warning Safety-Control Policy

Nella sezione precedente abbiamo definito le belief structure corrispondenti agli stati del sistema e come la politica FW sia più orientata sugli eventi che caratterizzano la non sicurezza dell'impianto mentre la politica SP ha una visione più legata agli eventi che considerano la sicurezza dell'impianto. Ora introduciamo alcune notazioni che ci consentono di definire le **belief structure di FW e SP**.

- **GO**: Decisione '*Attivo un'impianto bloccato*' oppure '*Non bloccare un'impianto in funzione*'. In altre parole se trova un'impianto bloccato allora lo avvia, oppure se trova un'impianto in funzione lo lascia nella sua condizione operativa.
- **SD**: Decisione '*Blocca un'impianto in funzione*' oppure '*Non attivare un'impianto bloccato*'. In questa situazione avviene esattamente l'opposto della situazione GO.
- **FW**: Fault Warning Policy in cui la disattivazione dell'impianto è basata sull'entità delle prove che sostengono la non sicurezza dell'impianto (Plant Not Safe) mentre la sua attivazione è dato dal resto delle altre prove. (ovvero stato Safe+ Universal set)
- **SP**: Safety Preservation in cui l'attivazione dell'impianto è basata sull'entità delle prove che sostengono la sicurezza dell'impianto. (Plant Safe) mentre la sua disattivazione è data da (stato Unsafe+ Universal set)

Ora valuteremo qual'è la migliore regola di combinazione per la **FW-SCP**. Per fare ciò occorre caratterizzare le belief structure che ci consentono di definire le azioni di controllo da esercitare sul sistema.

- **m(GO:FW)**: la massa da attribuire alla decisione GO sulla base della politica FW.
- **m(SD:FW)**: la massa da attribuire alla decisione SD sulla base della politica FW.

Una **FW Safety Control Policy** è formalmente definita come una Corrispondenza (Mapping) tra l'insieme delle Proposizioni che individuano gli insiemi del Power Set e le Decisioni da prendere. $\{\mathbf{S}, \mathbf{U}, \mathbf{X}\} \rightarrow \{GO, SD\}$. Nel caso specifico di FW si ha:

$$\begin{aligned} \mathbf{FW} &: \{\mathbf{S}, \mathbf{X}\} \rightarrow \{\mathbf{GO}\} \\ \mathbf{FW} &: \{\mathbf{U}\} \rightarrow \{\mathbf{SD}\} \end{aligned} \quad (1.60)$$

Per come è deffinito il Mapping osserviamo che $\mathbf{m}(\mathbf{GO} : \mathbf{FW})$ e $\mathbf{m}(\mathbf{SD} : \mathbf{FW})$ sono ottenute dall'insieme $\mathbf{m}(\mathbf{S}), \mathbf{m}(\mathbf{U}), \mathbf{m}(\mathbf{X})$ considerando la **Unified Combination Rule**:

$$\begin{aligned}\mathbf{m}(\mathbf{GO} : \mathbf{FW}) &= \mathbf{m}(\mathbf{S}) + \mathbf{m}(\mathbf{X}) \\ &\quad [1 + \mathbf{k} \cdot \mathbf{q}(\emptyset)] \cdot [\mathbf{q}(\mathbf{S}) + \mathbf{q}(\mathbf{X})] + [1 + \mathbf{k} \cdot \mathbf{q}(\emptyset) - \mathbf{k}] \cdot \mathbf{q}(\emptyset) \\ \mathbf{m}(\mathbf{SD} : \mathbf{FW}) &= \mathbf{m}(\mathbf{U}) \\ &\quad [1 + \mathbf{k} \cdot \mathbf{q}(\emptyset)] \cdot \mathbf{q}(\mathbf{U})\end{aligned}\tag{1.61}$$

In particolare osserviamo che $\mathbf{m}(\mathbf{GO} : \mathbf{FW})$ è una **Funzione del parametro k Monotona Non-Crescente**. Quindi comunque fisso $q(\emptyset), q(S), q(X)$ e facendo variare k per una generica terna di questi valori, tale funzione non aumenta.

Mentre $\mathbf{m}(\mathbf{SD} : \mathbf{FW})$ è una **Funzione del parametro k Monotona Non-Decrescente**. Quindi comunque fisso $q(\emptyset), q(U)$ e facendo variare k per una generica coppia di questi valori, tale funzione non diminuisce.

Analizziamo i casi relativi alle due azioni di controllo per specifici valori di k.

$\mathbf{m}(\mathbf{GO} : \mathbf{FW})$:

Yager's Rule: $\mathbf{k} = 0$

$$\mathbf{m}^{\mathbf{Y}}(\mathbf{GO} : \mathbf{FW}) = \mathbf{q}(\mathbf{S}) + \mathbf{q}(\mathbf{X}) + \mathbf{q}(\emptyset)\tag{1.62}$$

Dempster's Rule: $\mathbf{k} = \frac{1}{1 - \mathbf{q}(\emptyset)}$

$$\mathbf{m}^{\mathbf{D}}(\mathbf{GO} : \mathbf{FW}) = \frac{\mathbf{q}(\mathbf{S}) + \mathbf{q}(\mathbf{X})}{1 - \mathbf{q}(\emptyset)}\tag{1.63}$$

In particolare possiamo notare che $\mathbf{m}^{\mathbf{Y}} \geq \mathbf{m}^{\mathbf{D}}$. Infatti si ha la seguente relazione:

$$\begin{aligned}q(S) + q(X) + q(\emptyset) &\geq \frac{q(S) + q(X)}{1 - q(\emptyset)} \quad 0 \leq q(\emptyset) < 1 \\ [1 - q(\emptyset)] \cdot (q(S) + q(X) + q(\emptyset)) &\geq q(S) + q(X) \\ \cancel{q(S)} + \cancel{q(X)} + q(\emptyset) - q(\emptyset) \cdot \cancel{q(S)} - q(\emptyset) \cdot \cancel{q(X)} - q(\emptyset)^2 &\geq \cancel{q(S)} + \cancel{q(X)} \\ q(\emptyset) \cdot [1 - q(\emptyset) - q(S) - q(X)] &\geq 0\end{aligned}\tag{1.64}$$

Dato che la somma complessiva delle masse del Power Set è minore o uguale ad uno dobbiamo valutare la disuguaglianza con il seguente vincolo:

$$q(\emptyset) + q(X) + q(S) \leq 1 \quad 0 \leq q(\emptyset) < 1\tag{1.65}$$

Osserviamo innanzitutto che la relazione di disuguaglianza non risulta valida in una situazione di totale conflitto tra le sorgenti che in linea di massima è abbastanza remota. Comunque analizziamo il caso $\mathbf{q}(\emptyset) = \mathbf{0}$, ovvero in assenza di conflitto.

$$\overbrace{q(\emptyset) \cdot [1 - q(\emptyset) - q(S) - q(X)]}^0 \geq 0\tag{1.66}$$

La relazione risulta quindi verificata, comunque si può notare che in assenza di conflitto si ha:

$$\mathbf{m}^{\mathbf{Y}}(\mathbf{GO} : \mathbf{FW}) = \mathbf{m}^{\mathbf{D}}(\mathbf{GO} : \mathbf{FW}) = q(X) + q(S) \quad q(\emptyset) = 0 \quad (1.67)$$

Studiamo ora il caso $q(\emptyset) + q(X) + q(S) = 1$ con $0 < q(\emptyset) < 1$:

$$q(\emptyset) \cdot \overbrace{[1 - q(\emptyset) - q(S) - q(X)]}^0 \geq 0 \quad (1.68)$$

Quindi la relazione risulta verificata; comunque si osserva che:

$$\begin{aligned} \mathbf{m}^{\mathbf{Y}}(\mathbf{GO} : \mathbf{FW}) &= \overbrace{q(S) + q(X) + q(\emptyset)}^1 \\ \mathbf{m}^{\mathbf{D}}(\mathbf{GO} : \mathbf{FW}) &= \frac{q(S) + q(X)}{1 - q(\emptyset)} \\ &= \frac{1 - q(\emptyset)}{1 - q(\emptyset)} = 1 \end{aligned} \quad (1.69)$$

In fine abbiamo il caso $q(\emptyset) + q(X) + q(S) < 1$ con $0 < q(\emptyset) < 1$:

$$\overbrace{q(\emptyset)}^{>0} \cdot \left[\overbrace{1 - \overbrace{q(\emptyset) + q(S) + q(X)}^{<1}}^{>0} \right] \geq 0 \quad (1.70)$$

Pertanto è verificata la disequazione.

$$\mathbf{Inagaki's Rule:} \quad \mathbf{k} = \frac{1}{1 - \mathbf{q}(\emptyset) - \mathbf{q}(\mathbf{X})}.$$

$$\begin{aligned} \mathbf{m}^{\mathbf{I}}(\mathbf{GO} : \mathbf{FW}) &= \left[1 + \frac{1}{1 - q(\emptyset) - q(X)} \cdot q(\emptyset) \right] \cdot [q(S) + q(X)] + \left[1 + \frac{1}{1 - q(\emptyset) - q(X)} \cdot q(\emptyset) - \frac{1}{1 - q(\emptyset) - q(X)} \right] \cdot q(\emptyset) \\ &= \frac{q(S) + q(X)}{1 - q(\emptyset) - q(X)} - \frac{q(X) \cdot [q(X) + q(S) + q(\emptyset)]}{1 - q(\emptyset) - q(X)}. \end{aligned} \quad (1.71)$$

Analogamente al caso precedente si può dimostrare che $\mathbf{m}^{\mathbf{I}} \geq \mathbf{m}^{\mathbf{Y}}$. Infatti si ha la seguente relazione:

$$\frac{q(S) + q(X)}{1 - q(\emptyset)} \geq \frac{q(S) + q(X)}{1 - q(\emptyset) - q(X)} - \frac{q(X) \cdot [q(X) + q(S) + q(\emptyset)]}{1 - q(\emptyset) - q(X)} \quad (1.72)$$

$$q(\emptyset) \cdot q(X) \cdot [1 - q(X) - q(S) - q(\emptyset)] \geq 0 \quad 1 - \mathbf{q}(\emptyset) \neq \mathbf{0} \quad \mathbf{q}(\mathbf{X}) \neq \mathbf{0} \quad \mathbf{q}(\emptyset) + \mathbf{q}(\mathbf{X}) + \mathbf{q}(\mathbf{S}) \leq \mathbf{1}$$

La quale risulta verificata. In particolare si osserva che:

$$\mathbf{q}(\emptyset) = \mathbf{0} \quad \mathbf{q}(\mathbf{X}) + \mathbf{q}(\mathbf{S}) = \mathbf{1} \quad m^{\mathbf{D}}(\mathbf{GO} : \mathbf{FW}) = m^{\mathbf{I}}(\mathbf{GO} : \mathbf{FW}) \quad (1.73)$$

Quindi in sintesi quello che si viene a creare è la seguente catena di disequazioni:

$$\mathbf{m}^{\mathbf{Y}}(\mathbf{GO} : \mathbf{FW}) \geq \mathbf{m}^{\mathbf{D}}(\mathbf{GO} : \mathbf{FW}) \geq \mathbf{m}^{\mathbf{I}}(\mathbf{GO} : \mathbf{FW}) \quad (1.74)$$

Effettuando dei passaggi analoghi a quelli precedenti si ottiene per l'altra decisione la seguente catena di disequazioni:

$$\mathbf{m}^Y(\mathbf{SD} : \mathbf{FW}) \leq \mathbf{m}^D(\mathbf{SD} : \mathbf{FW}) \leq \mathbf{m}^I(\mathbf{SD} : \mathbf{FW}) \quad (1.75)$$

Dalle due relazioni precedenti possiamo quindi concludere che per mantenere una situazione di Sicurezza utilizzando una **FW policy** la regola di Yager risulta la meno adatta. Infatti tra tutte le CombRule individuate dalla Unified Comb Rule di Inagaki la regola di Yager ha la maggiore probabilità di bloccare erroneamente l'impianto che reputa non sicuro rispetto alle altre regole. Inoltre in questa circostanza abbiamo mostrato che in generale non è vero che la regola di Yager risulti più conservativa della regola di Dempster o delle altre. E' chiaro che la miglior regola da utilizzare è quella che si ha in corrispondenza dell'Upper Bound di k individuato dalla Inagaki's Extra Rule, che risulta la meno 'propensa' rispetto alle altre ad attivare un'impianto, come si può facilmente vedere dai due estremi delle due disuguaglianze. Infatti ha il minor valore di $m(\mathbf{GO} : \mathbf{FW})$ ed il maggior valore di $m(\mathbf{SD} : \mathbf{FW})$.

1.6.3 Safety-Preservation Safety-Control Policy

Una **SP safety-control policy** è definita dal seguente mapping:

$$\begin{aligned} \mathbf{SP} : \{\mathbf{S}\} &\rightarrow \{\mathbf{GO}\} \\ \mathbf{SP} : \{\mathbf{U}, \mathbf{X}\} &\rightarrow \{\mathbf{SD}\} \end{aligned} \quad (1.76)$$

Calcoliamo quindi le masse corrispondenti alle due decisioni nel caso di una politica **SP**:

$$\begin{aligned} \mathbf{m}(\mathbf{GO} : \mathbf{SP}) &= \mathbf{m}(\mathbf{S}) \\ & [1 + k \cdot q(\emptyset)] \cdot q(S) \\ \mathbf{m}(\mathbf{SD} : \mathbf{SP}) &= \mathbf{m}(\mathbf{U}) + \mathbf{m}(\mathbf{X}) \\ & [1 + k \cdot q(\emptyset)] \cdot [q(U) + q(X)] + [1 + k \cdot q(\emptyset) - k] \cdot q(\emptyset). \end{aligned} \quad (1.77)$$

- $\mathbf{m}(\mathbf{GO} : \mathbf{SP})$: è una funzione di k e risulta *monotona non-crescente*.
- $\mathbf{m}(\mathbf{SD} : \mathbf{SP})$: è una funzione di k e risulta *monotona non-decrescente*.

Le relazioni d'ordine tra le differenti regole di combinazione individuate in corrispondenza dei rispettivi valori di k sono:

- $\mathbf{m}^Y(\mathbf{GO} : \mathbf{SP}) \leq \mathbf{m}^D(\mathbf{GO} : \mathbf{SP}) \leq \mathbf{m}^I(\mathbf{GO} : \mathbf{SP})$
- $\mathbf{m}^Y(\mathbf{SD} : \mathbf{SP}) \geq \mathbf{m}^D(\mathbf{SD} : \mathbf{SP}) \geq \mathbf{m}^I(\mathbf{SD} : \mathbf{SP})$

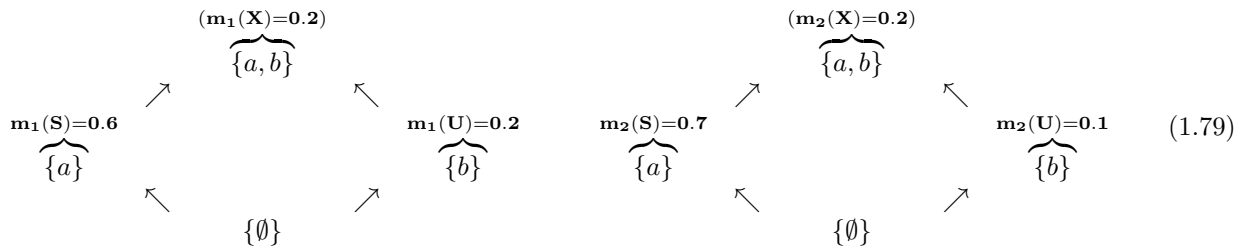
Pertanto nella situazione di una **PS policy** la regola di **Yager** è la migliore (ovvero la *più sicura*) per mantenere l'impianto in una situazione di sicurezza.

1.6.4 Esempi Numerici

Prendiamo in considerazione due sorgenti d'informazione con le loro rispettive belief Structure $\mathbf{S}_1 \rightarrow \mathbf{bba}_1$ e $\mathbf{S}_2 \rightarrow \mathbf{bba}_2$, che sono riportate dai vettori: (NB: Per una descrizione dettagliata del calcolo della combinazione delle masse mediante la TBM si consiglia di vedere il capitolo 2)

$$\mathbf{m}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.6 \\ 0.2 \\ 0.2 \end{bmatrix} \leftarrow \mathbf{bba}_1 \rightarrow \mathbf{m}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.7 \\ 0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix} \quad (1.78)$$

Il diagramma di Hasse corrispondente è riportato di seguito 1.79.



Il vettore della **masse non normalizzate** ottenuto dalla fusione delle due Sorgenti è:

$$\mathbf{m}_1 \oplus \mathbf{m}_2 = \begin{bmatrix} m_{12} \\ 0.20 \\ 0.68 \\ 0.08 \\ 0.04 \end{bmatrix} \quad (1.80)$$

Dal quale si osserva che il conflitto tra S_1 e S_2 è minimo, e la prova che ha maggiore peso è **S:(Plant is Safe)**. Ora formuliamo la famiglia parametrica delle Comb Rule identificate dalla **Unified Combination Rule** di Inagaki, per i rispettivi insiemi del Power Set.

$$\begin{aligned} \mathbf{m}(\mathbf{S}) &= (1 + 0.2 \cdot \mathbf{k}) \cdot 0.68 \\ \mathbf{m}(\mathbf{U}) &= (1 + 0.2 \cdot \mathbf{k}) \cdot 0.08 \\ \mathbf{m}(\mathbf{X}) &= (1 + 0.2 \cdot \mathbf{k}) \cdot 0.04 + (1 - 0.8\mathbf{k}) \cdot 0.20 \end{aligned} \quad (1.81)$$

Sulla base delle rispettive politiche di sicurezza, ovvero la *Fault-Warning Safety-Control Policy* **FW-P** e la *Safety-Preservation Safety-Control Policy* **SF-P**; Si può immediatamente riconoscere una struttura a noi familiare. Ovvero:

$$\begin{aligned} \mathbf{Bel}(\mathbf{S}) &= m(\mathbf{S}) = \mathbf{m}(\mathbf{GO} : \mathbf{SP}) \\ \mathbf{pl}(\mathbf{S}) &= m(\mathbf{S}) + m(\mathbf{X}) = \mathbf{m}(\mathbf{GO} : \mathbf{FW}) \end{aligned} \quad (1.82)$$

- **Bel(S)**:Infatti ricordo che la Belief relativa ad S, sono l'insieme delle prove che sostengono l'ipotesi che l'impianto risulti sicuro. E pertanto la massa $\mathbf{m}(\mathbf{S})$ racchiude l'intensità delle prove che sostengono la decisione di attivare un'impianto bloccato oppure di non bloccare l'impianto in funzione (**GO**) seguendo la **SF**. Quindi il valore di $\mathbf{m}(\mathbf{GO:SP})$ costituisce il nostro Lower Bound; ovvero possiamo stare sicuri che

la probabilità che l'impianto sia sicuro non può andare al di sotto di tale valore per un certo valore di k che filtra le prove.

- **PI(S)**: Per quanto riguarda la Plausibility relativa ad S , riguarda l'insieme delle prove che non sono in contrasto con l'ipotesi che sto facendo. Quindi il valore di **PI(S)** potrebbe potenzialmente andare a carico dell'ipotesi S , ma ovviamente non esclude la possibilità che l'impianto possa essere non sicuro. Quindi 'potrebbe' aumentare la probabilità che l'impianto risulti sicuro e quindi costituisce il nostro Upper Bound. Ovviamente **m(GO:FW)** è l'intensità delle prove che sostengono la decisione di attivare l'impianto bloccato oppure di non bloccare l'impianto che è attivo, seguendo la **FW**.
- **Gap**: Ovviamente tanto più è maggiore il gap tra i due valori e tanto più grande è l'intervallo d'incertezza.
- **k**: Al fine di poter valutare la migliore regola di Combinazione e quindi il valore di k idoneo per la specifica strategia ricordo che in una situazione di:
 - **FW**: è preferibile avere un valore **basso** di **m(GO:FW)** (in altre parole filtriamo il più possibile l'insieme delle ipotesi che non contrastano la sicurezza dell'impianto in quanto si desidera avere sempre una visione cautelativa). Ed un valore **alto** di **m(SD:FW)=m(U)**, ovvero di bloccare un'impianto o di non attivare l'impianto sulla base delle prove a sostegno della non-sicurezza dell'impianto (Quindi filtrare il meno possibile $m(U)$).
 - **SP**: si desidera avere un valore **basso** di **m(GO:SP)=m(S)**, in quanto si ha come al solito una visione più cautelativa nell'attivare l'impianto sulla base delle prove che otteniamo riguardo la sua sicurezza. (In altre parole filtriamo il più possibile $m(S)$). Ed un valore **alto** di **m(SD:SP)=m(U)+m(X)** in quanto non voglio escludere nessuna prova a sostegno della possibilità che l'impianto non sia sicuro. (quindi filtrare il meno possibile $m(U)+m(X)$)

Pertanto otteniamo che le rispettive Belief e Plausibility in funzione del parametro k sono:

$$\text{Bel}(S) = \mathbf{m}(\mathbf{GO} : \mathbf{SP}) = 0.68 + 0.136 \cdot k \quad \text{PI}(S) = \mathbf{m}(\mathbf{GO} : \mathbf{SW}) = 0.92 - 0.016 \cdot k \quad (1.83)$$

Calcoliamo l'Upper Bound del parametro k in modo da effettuare successivamente la **Comb-Rule Tuning**. Il valore massimo si ottiene in corrispondenza della **Inagaki's Extra Rule**, ovvero:

$$k = \frac{1}{1 - \mathbf{q}(\emptyset) - \mathbf{q}(X)} \quad k_I = \frac{1}{1 - 0.20 - 0.04} = 1.136 \quad k \in [0 \ 1.136] \quad (1.84)$$

L'andamento della $\text{Belief}(S)$ e della $\text{PI}(S)$ al variare di k è riportato in figura 1.14, dove per semplicità è stato scelto come passo di campionamento dei valori k pari ad $\alpha = 0.1$. Quindi avremo in totale 14 valori di k , in corrispondenza dei quali abbiamo calcolato le rispettive Belief e Plausibility.

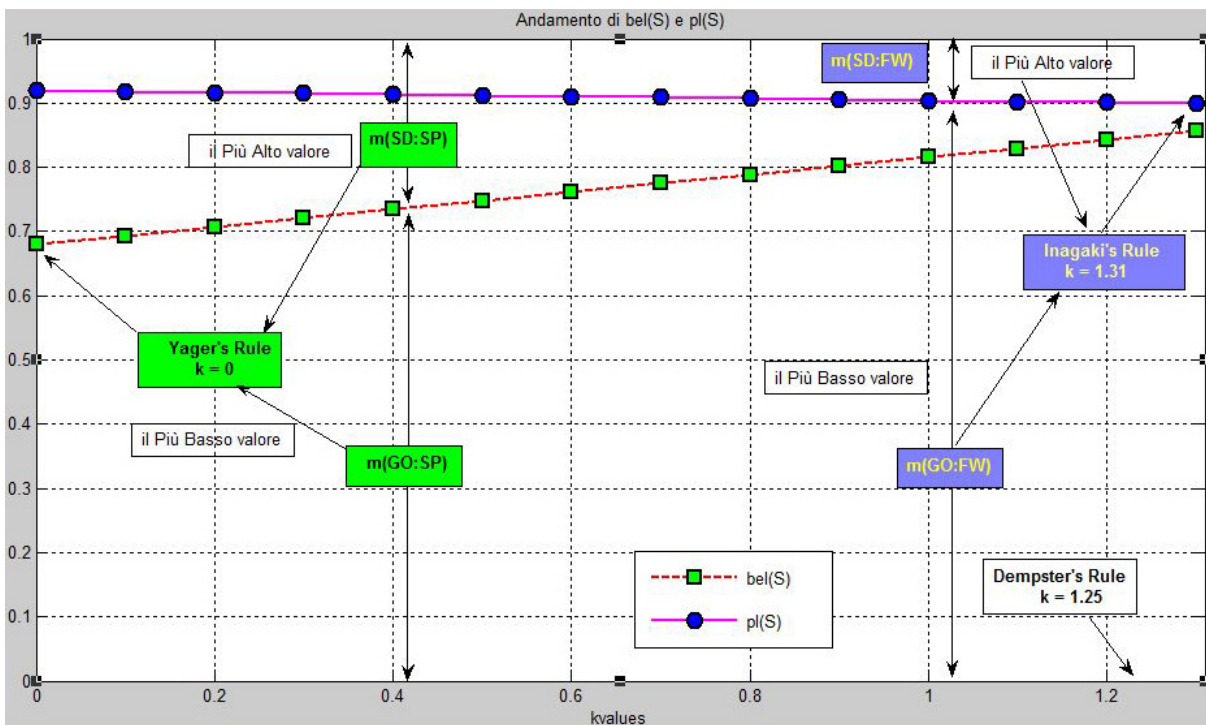


Figura 1.13: m(GO:FW) e m(GO:SP) less conflict

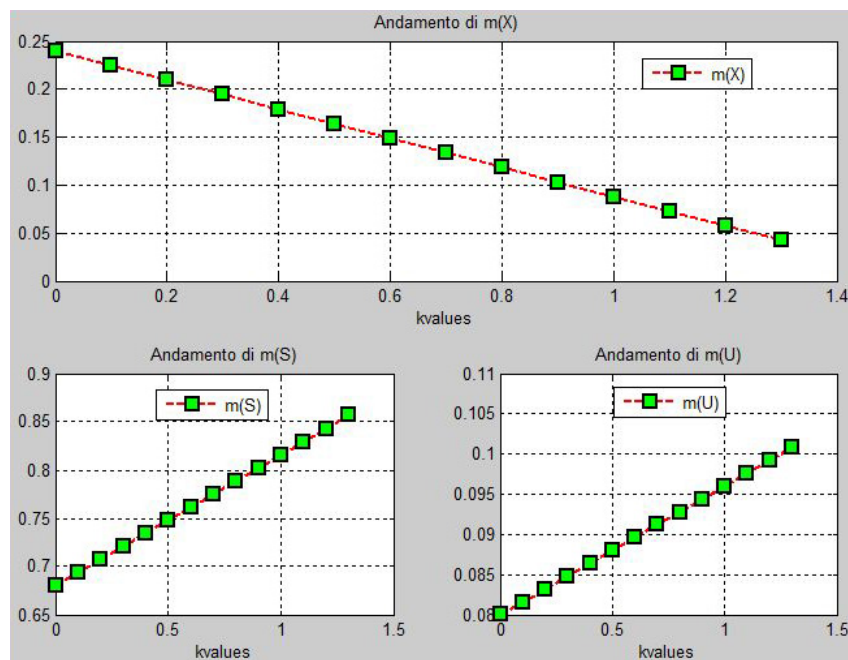


Figura 1.14: m(S) m(U) m(X) less conflict

Dall'analisi della figura 1.14 possiamo valutare il comportamento del sistema, quando la presenza del conflitto non è allarmante, in una situazione in cui si desidera utilizzare una delle due politiche:

- **Fault-warning safety-control policy:** Dall'andamento del grafico si nota che la $\mathbf{PI(S)}$ non subisce variazioni significative al variare di k ; ciò significa che in una situazione di **FW** non si ha la necessità di scegliere attentamente il valore del parametro, in corrispondenza del quale ottenere la miglior CombRule. Quindi quando $\mathbf{q}(\emptyset)$ è **basso** non si apprezzano significative differenze tra un valore di k ed un'altro in una politica FW.
- **Safety-preservation safety-control policy:** Per quanto riguarda la $\mathbf{Bel(S)}$, si nota che risulta più sensibile alle variazioni di k . Quindi occorre stare attenti nella scelta del valore del parametro k anche quando il conflitto tra le sorgenti del sistema è esiguo.

Altre considerazioni di carattere generale sono:

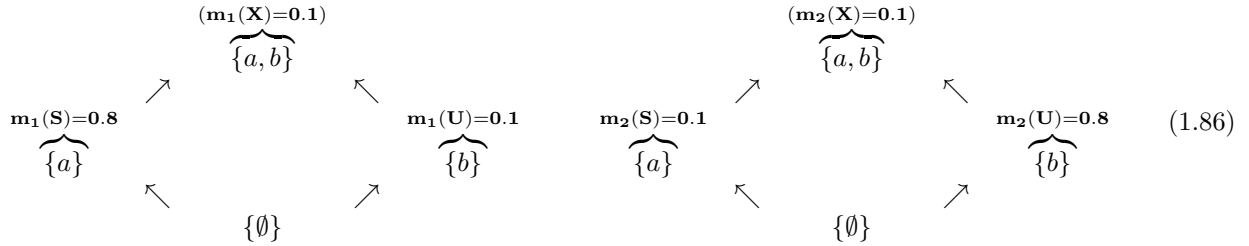
- La funzione parametrica è una combinazione lineare convessa delle masse del Power Set, nello specifico osserviamo che il suo andamento può essere studiato semplicemente calcolando il valore delle bba e quindi successivamente della Belief, in corrispondenza della Regola di Yager, Dempster ed in fine di Inagaki. Dopo di che basta interpolare la regola di Dempster a partire da $k=0$ e successivamente estrapolare la regola di Dempster a partire dall'Upper Bound di k definito dalla Inagaki's Extra Rule. Pertanto i 'gradi di libertà delle Regole del sistema sistema' è un sottoinsieme del prodotto Cartesiano. $[0 \ k_I] \times [f(0) \ f(k_I)] \subseteq [0 \ k_I] \times [0 \ 1]$; Tanto più è significativo il codominio dell'applicazione tanto più il sistema risulta sensibile tra una regola di combinazione e l'altra. Idealmente potremmo quantificare la coerenza tra le informazioni provenienti dalle diverse sorgenti in funzione dell'area sottesa dalle funzioni considerate. Nel nostro caso la differenza è tra l'area sottesa dalla curva della $\mathbf{PI(s)}$ che ricordo essere una funzione monotona decrescente maggiore o uguale di $\mathbf{Bel(S)}$, e la curva di $\mathbf{Bel(S)}$ che è una funzione monotona crescente. Nella situazione $\mathbf{Bel(S)=PI(S)}$ siamo collasati nel singleton ed abbiamo attribuito la probabilità precisa dell'evento, corrispondente ad un determinato valore di k . In particolare osserviamo che se filtriamo poco le prove del sistema relative alla sicurezza dell'impianto e ci affidiamo ai nostri 'informatori', il duality gap tra la Plausibilità e la Credibilità è piccolo. Viceversa se siamo abbastanza diffidenti delle prove e vogliamo attuare una politica più cautelativa, allora la nostra incertezza nello stabilire che l'impianto sia sicuro è grande e quindi il duality gap è maggiore (Da qui si comprende per quale motivo in una situazione di \mathbf{Sp} si desidera una valore basso della credibilità). Analogamente se invece decidiamo di basare la nostra azione di controllo sulla Plausibilità che l'impianto sia sicuro, occorre filtrare il più possibile le prove in modo tale da considerare una visione più circoscritta delle prove che non contrastano la sicurezza dell'impianto. Questo si traduce in un valore basso della Plausibility.

Adesso analizziamo quanto il sistema (che abbiamo modellato con le nostre belief structure) risulti sensibile ai valori delle masse del Power Set; ed in particolare come in funzione del conflitto possa cambiare notevolmente la situazione.

Esempio 2: Si consideri ora la situazione in cui il livello di conflitto tra due sorgenti di informazione risulta elevato.

$$\mathbf{m}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.8 \\ 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix} \leftarrow \mathbf{bba}_i \rightarrow \mathbf{m}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \\ 0.8 \\ 0.1 \end{bmatrix} \quad (1.85)$$

Il diagramma di Hasse corrispondente è riportato di seguito 1.79.



Il vettore della **masse non normalizzate** ottenuto dalla fusione delle due Sorgenti è:

$$\mathbf{m}_1 \oplus \mathbf{m}_2 = \begin{bmatrix} \overbrace{0.65}^{m_{12}} \\ 0.17 \\ 0.17 \\ 0.01 \end{bmatrix} \quad (1.87)$$

Da cui si osserva una notevole quantità di conflitto, dato che più del 50 % della massa del Power set è riversata nell'insieme vuoto. Mentre la massa dei due stati del sistema è uguale.

Ora formuliamo la famiglia parametrica delle Comb Rule identificate dalla **Unified Combination Rule** di Inagaki, per i rispettivi insiemi del Power Set.

$$\begin{aligned} \mathbf{m}(\mathbf{S}) &= (1 + 0.65 \cdot \mathbf{k}) \cdot 0.17 \\ \mathbf{m}(\mathbf{U}) &= (1 + 0.65 \cdot \mathbf{k}) \cdot 0.17 \\ \mathbf{m}(\mathbf{X}) &= (1 + 0.65 \cdot \mathbf{k}) \cdot 0.01 + (1 - 0.35\mathbf{k}) \cdot 0.65 \end{aligned} \quad (1.88)$$

Pertanto otteniamo che le rispettive Belief e Plausibility in funzione del parametro k sono:

$$\mathbf{Bel}(\mathbf{S}) = \mathbf{m}(\mathbf{GO} : \mathbf{SP}) = 0.17 + 0.11 \cdot \mathbf{k} \quad \mathbf{Pl}(\mathbf{S}) = \mathbf{m}(\mathbf{GO} : \mathbf{SW}) = 0.83 - 0.11 \cdot \mathbf{k} \quad (1.89)$$

Calcoliamo l'Upper Bound del parametro k in modo da effettuare successivamente la **Comb-Rule Tuning**. Il valore massimo si ottiene in corrispondenza della **Inagaki's Extra Rule**, ovvero:

$$\mathbf{k} = \frac{1}{1 - \mathbf{q}(\emptyset) - \mathbf{q}(\mathbf{X})} \quad \mathbf{k}_I = \frac{1}{1 - 0.65 - 0.01} = \mathbf{2.94} \quad \mathbf{k} \in [0 \ 2.94] \quad (1.90)$$

L'andamento della Belief(S) e della Pl(S) al variare di k è riportato in figura 1.15, dove per semplicità è stato scelto come passo di campionamento dei valori k pari ad $\alpha = 0.2$. Quindi avremo in totale 16 valori di k, in corrispondenza dei quali abbiamo calcolato le rispettive Belief e Plausibility.

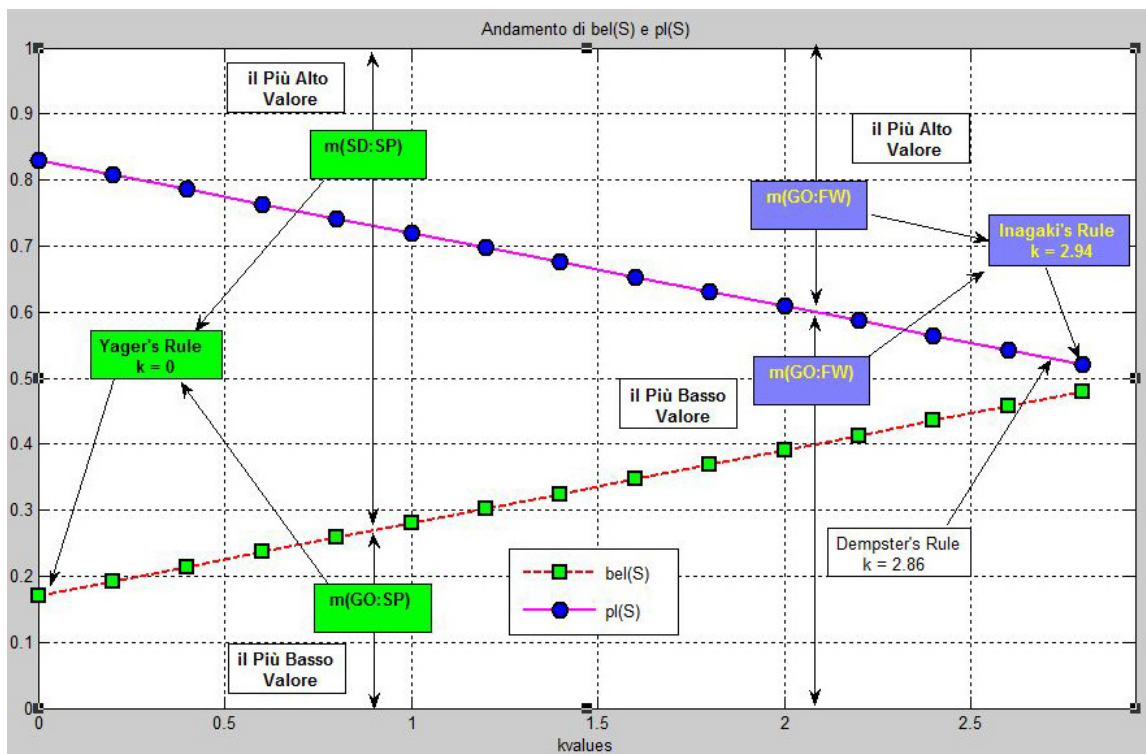


Figura 1.15: $m(GO:FW)$ e $m(GO:SP)$ high conflict

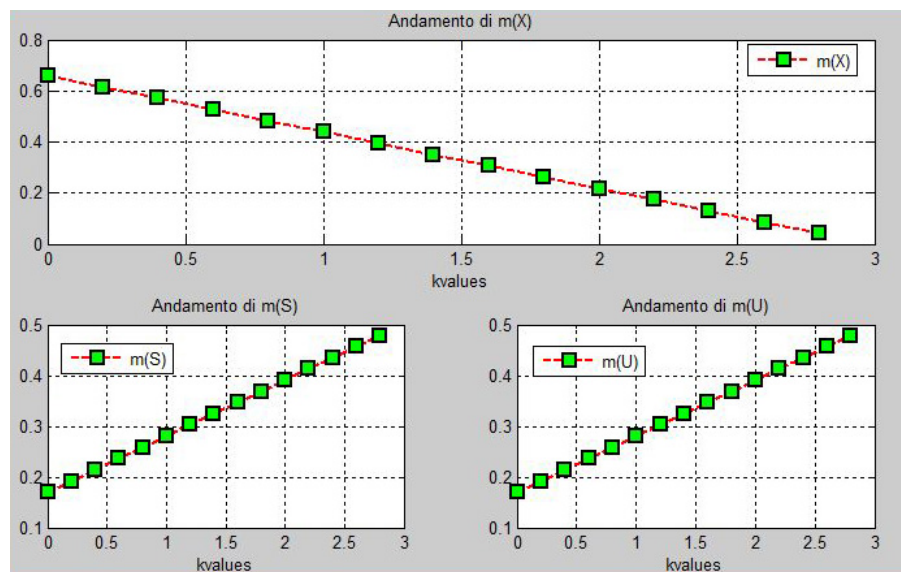


Figura 1.16: $m(S)$ $m(U)$ $m(X)$ high conflict

Analogamente all'esempio precedente valutiamo le due strategie **FW** e **SP** muovendoci rispettivamente lungo la curva della **Bel(S)** e la curva **Pl(S)**, in presenza di grande conflitto; dove ovviamente tale conflitto è rappresentato dal valore di $q(\emptyset)$. Nello specifico abbiamo:

- **Fault-Warning safety-control policy:** si nota che la **Pl(S)** risulta molto sensibile alla variazione di k e quindi occorre valutare attentamente la CombRule da applicare al sistema, sulla base della nostra conoscenza soggettiva delle sorgenti.
- **Safety-Preservation safety-control policy:** analogamente a **Pl(S)** anche la **Bel(S)** presenta delle brusche variazioni per incrementi piccoli di k , quindi anche in questa circostanza bisogna stare attenti.

High Conflict:

In sostanza la scelta inappropriata di una CombRule pregiudica notevolmente la sicurezza del sistema quando la decisione di bloccare un'impianto in condizioni di alto conflitto è basata sia su una politica Fault-Warning che una politica Safety-Preservation. Questo si può naturalmente evincere dall'area sottesa dalle due curve.

Less Conflict Viceversa, quando il conflitto presente nel sistema non è significativo, non ha importanza come decido di filtrare le prove nel caso in cui si utilizza una politica Fault-Warning. Mentre risulta più delicata la scelta soggettiva di come scremare le prove nel caso di una politica Safety-Preservation.

Comunque, in generale non si può dire che una strategia risulti migliore in assoluto rispetto ad un'altra e la loro scelta dipende dal progettista. Il quale se desidera basare la sua azione di controllo più sulla base delle prove che il sistema risulti sicuro (Plant Safe) e decidendo come filtrare tale body of evidence raggiungendo la configurazione più cautelativa in corrispondenza della Yager's Rule ($k=0$), allora adotterà una Safety-Preservation Policy; Altrimenti se preferisce basarsi sulle prove che non contrastano il funzionamento dell'impianto e decidendo come filtrarle raggiungendo la configurazione più cautelativa in corrispondenza di Inagaki's Extra rule utilizzerà una Fault-Warning Policy.

1.6.5 Linee Guida per la Progettazione

Dai due esempi analizzati nel paragrafo precedente, abbiamo individuato a grandi linee quelli che costituiscono gli step fondamentali nel definire un modello che descriva l'incertezza di un dato sistema. Da un punto di vista metodologico possiamo individuare **7 steps**:

1. Definire l'insieme dei possibili stati che definiscono il sistema in oggetto (Analogamente a quanto avviene nella definizione di un'Automa) che costituiscono il nostro **frame of-discernment Ω** .
2. A partire dall'insieme universale **X** costruiamo tutti i suoi possibili sottoinsiemi che caratterizzano lo *scheletro*, o utilizzando un termine più specifico il **framework del Power Set**. E' chiaro che la complessità del problema cresce in modo esponenziale al crescere della cardinalità di Ω .
3. Successivamente stabiliamo quali sono le **azioni di controllo** da intraprendere sulla base di determinate *proposizioni* che individuano una specifica **Strategia**.
4. Tali **Proposizioni** definiscono un **mapping** tra gli Insiemi del **Power Set** e la specifica **azione di controllo**. Quindi definiscono il nostro secondo **framework** relativo alle **bba** del sistema.

5. Per valutare l'entità delle **bba structure** corrispondenti ad una data strategia, occorre attribuire ovviamente dei valori alle masse del sistema che definiscono le **istanze** del problema che sono modellate dalla visione soggettiva della realtà Realtà d'interesse da parte delle singole sorgenti. Ovvero il loro '**body of evidence of the sources**'. Risulta chiaro che se si considera un *what if simulation strategy* le possibili distribuzioni della massa tra gli elementi del power set sono infinite, pertanto le prestazioni della Comb Rule viene valutata in funzione del conflitto risultante dalla combinazione delle masse(vedi step successivo).
6. Sulla base dei risultati ottenuti in seguito alla **fusione** delle varie informazioni, frutto della **conjunctive combination rule** (Nell'ipotesi che il nostro Power Set sia esaustivo per l'applicazione considerata **Closed World Hypothesis**), si ottengono i valori delle **masse non normalizzate**.
7. In fine sulla scelta **soggettiva** di come **filtrare** le prove del sistema si sceglie **un'opportuno valore di k**, il quale **dipende** dalla **specifica applicazione** e dalla **specifica strategia**.

Capitolo 2

Implementazione della Dempster and Shafer Theory

Evidence having a shade more of plausibility than of unlikelihood. The testimony of two credible witnesses as opposed to that of only one.

- Ambrose Bierce, *The Devil's Dictionary*.

2.1 Introduzione

La trattazione matematica delle funzioni Belief è spesso un problema difficilmente trattabile a causa delle numerose sommatorie che compaiono nelle formule e soprattutto alle operazioni insiemistiche definite sui vari sottoinsiemi del Powe Set.

Una possibile strada che consente di affrontare questa difficoltà, è quella di ricorrere ad una Rappresentazione Matriciale, la quale risulta poco diffusa tra gli addetti nel campo ma essa costituisce uno strumento efficace ed espressivo per essere utilizzato in ambienti di programmazione dove questa struttura dati sta alla base. Un tipico esempio è Matlab (Matrix Laboratory), al quale faremo riferimento per l'implementazione dei diversi algoritmi presentati nel capitolo precedente.

2.1.1 Rappresentazione di sottoinsiemi tramite i bit-arrays

A partire dall'assegnazione delle masse **Belief Assignment (bba)** m^Ω agli elementi del Power Set (ottenuto da un Frame of Discernment Ω finito), possiamo vedere la funzione di Belief **Belief Function** bel^Ω e la corrispondente funzione di Plausibilità **Plausibility Function** pl^Ω e la **Commonality Function** q^Ω come dei vettori in $R^{|\Omega|}$. L'ordine dei loro elementi può essere del tutto arbitrario, ma la scelta di un particolare ordinamento può risultare estremamente pratico per l'implementazione di algoritmi nei vari linguaggi di programmazione.

Sia m^Ω una bba definita su un Frame of Discernment $\Omega = \{a,b,c\}$. Gli elementi di m^Ω sono memorizzati ed ordinati secondo un formato binario. Ovvero il primo elemento di m^Ω è l'insieme vuoto \emptyset , quello successivo è $\{a\}$ poi $\{b\}, \{ab\}, \dots, \{abc\}$. La seguente Tabella 2.1 rappresenta quali sono i vettori $R^{|\Omega|}$ del Power Set di

position	cba	Ω	m	bel	pl
1	000	\emptyset	$m(\emptyset)$	$bel(\emptyset)$	$pl(\emptyset)$
2	001	a	$m(a)$	$bel(a)$	$pl(a)$
3	010	b	$m(b)$	$bel(b)$	$pl(b)$
4	011	ab	$m(ab)$	$bel(ab)$	$pl(ab)$
5	100	c	$m(c)$	$bel(c)$	$pl(c)$
6	101	ac	$m(ac)$	$bel(ac)$	$pl(ac)$
7	110	bc	$m(bc)$	$bel(bc)$	$pl(bc)$
8	111	abc	$m(abc)$	$bel(abc)$	$pl(abc)$

Tabella 2.1: Order of the elements of the vectors **m, bel, pl** in $\Omega = \{a, b, c\}$

Ω , alla quale è associata il reticolo riportato in figura 2.1. In generale l'elemento i -esimo del vettore $v = [v_i]$ corrisponde all'insieme i i cui elementi sono quelli indicati da 1 nella rappresentazione binaria di i .

Sia $\Omega = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ e consideriamo l'elemento v_{14} . Allora la sua rappresentazione binaria $i - 1$ corrisponde a $14 - 1$ ovvero $13 = 1101$; che individua quindi il seguente insieme che chiameremo per semplicità $W = \{w_4, w_3, w_1\}$: $v_{14} = v(\{w_1, w_3, w_4\})$. (Risulta chiaro che essendo un'insieme è indifferente l'ordine in cui elenco gli elementi nella notazione, ma è fondamentale l'ordine nella rappresentazione binaria).

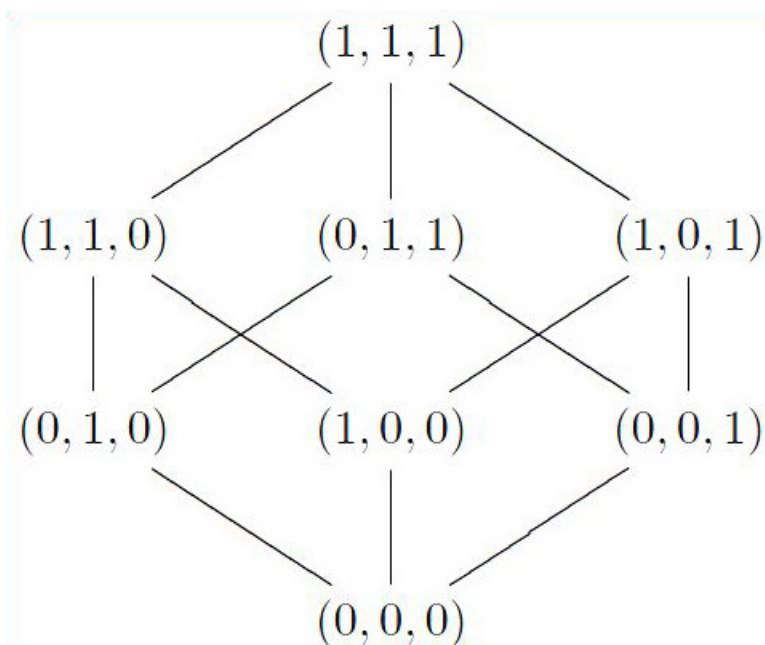


Figura 2.1: reticolo di $\Omega = \{a, b, c\}$

D'ora in avanti utilizzeremo le seguenti notazioni e convenzioni:

1. Le Matrici ed i Vettori sono scritti in grassetto e gli elementi in corsivo. Esempio $\mathbf{A} = [A_{i,j}]$. Per default, la lunghezza dei vettori e delle matrici è pari a $2^{|\Omega|}$. I vettori sono dei vettori colonna.
2. 0 e 1 rappresentano due scalari.
3. $\mathbf{0}$ indica il vettore colonna di lunghezza $2^{|\Omega|}$ i cui componenti sono tutti pari a zero.
4. $\mathbf{1}$ indica il vettore colonna di lunghezza $2^{|\Omega|}$ i cui componenti sono tutti pari a uno.
5. $\mathbf{1}_A$ indica il vettore colonna di lunghezza $2^{|\Omega|}$ i cui componenti sono pari a zero ad eccezione del componente corrispondente ad $A \subseteq \Omega$ il cui valore è pari ad uno.
6. \mathbf{m}' e \mathbf{M}' indicano rispettivamente il vettore trasposto di \mathbf{m} e la matrice trasposta di \mathbf{M} .
7. $\mathbf{Diag}(\mathbf{v})$ è la matrice diagonale i cui elementi sulla diagonale principale sono gli elementi del vettore \mathbf{v} .
8. Dati due vettori \mathbf{u} e \mathbf{v} definiti sullo stesso dominio, se $\mathbf{u} \geq \mathbf{v}$ significa che $u_i \geq v_i \quad \forall i$ ed in modo del tutto simmetrico per $\mathbf{u} \leq \mathbf{v}$.
9. Per semplicità di notazione, scriviamo a al posto di $\{a\}$, ab per $\{a, b\}$ ed abc per $\{a, b, c\}$ etc ... Perciò una lista formata dai simboli degli elementi di Ω rappresenta l'insieme che contiene esattamente suddetti elementi.
10. \mathbf{I} rappresenta la Matrice identità, *i.e.*, i suoi elementi sono tutti pari a zero ad eccezione di quelli sulla diagonale principale. Sotto è riportato il caso in cui $|\Omega| = 3$ [2.1](#) (i puntini stanno ad indicare gli zeri).
11. \mathbf{J} rappresenta la matrice quadrata i cui elementi sono pari a zero ad eccezione degli elementi sulla diagonale secondaria che sono pari ad uno (vedi [2.2](#)).
12. In particolare la matrice \mathbf{J} gode delle seguenti proprietà:
 - $\mathbf{J} \cdot \mathbf{J} = \mathbf{I}$
 - $\mathbf{J} = \mathbf{J}^{-1}$
 - Inoltre se pre-moltiplica un'altra matrice inverte l'ordine delle righe (la prima riga diventa l'ultima vedi esempio [2.3](#)), ed inverte l'ordine delle colonne di una matrice quando viene post-moltiplicata [2.4](#).

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^J \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^J = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 9 & 8 & 7 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

2.2 Le Funzioni Belief

Nella presente trattazione si assume che è possibile assegnare masse positive all'insieme vuoto e che $bel(\Omega)$ e $pl(\Omega)$ possono essere minori di 1 (Come è stato più volte ripreso nel capitolo precedente).

Sia bel una funzione belief definita su un Frame of discernment finito. A partire dalla funzione bel possono essere definite numerose funzioni, le quali hanno una corrispondenza univoca. Ovvero a partire da un qualsiasi valore di una di queste funzioni è possibile ricavare univocamente il valore delle altre. In particolare le funzioni a cui siamo principalmente interessati sono:

- *basic belief assignment (bba o m)*.
- *plausibility (pl)*.
- *commonality (q)*.
- *implicability (b)*.

Infatti data la generica tupla $(m(A), bel(A), pl(A), q(a), b(a))$, a partire dalla conoscenza del valore che assume una di queste funzioni è possibile risalire al valore di tutte le altre. Tale corrispondenza è one-to-one. Questo serve ad enfatizzare che nessuna fornisce delle informazioni che non è inclusa nelle altre. Elenchiamo quindi le relazioni che legano una funzione alle altre (Le relazioni risultano valide per $\forall A \subseteq \Omega$).

- **Basic Belief Assignment:**

$$\begin{aligned}
\mathbf{m} \leftrightarrow \mathbf{q} : \quad & \mathbf{m}(\mathbf{A}) = \sum_{A \subseteq B} (-1)^{|A|-|B|} \cdot q(B) & \mathbf{q}(\mathbf{A}) = \sum_{A \subseteq B} m(B) \\
\mathbf{m} \leftrightarrow \mathbf{bel} : \quad & \mathbf{m}(\mathbf{A}) = \sum_{B \subseteq A} (-1)^{|A|-|B|} \cdot bel(B); & \mathbf{bel}(\mathbf{A}) = \sum_{\emptyset \neq B \subseteq A} m(B) \\
& \mathbf{m}(\emptyset) = 1 - bel(\Omega) & \mathbf{bel}(\emptyset) = 0 \\
\mathbf{m} \leftrightarrow \mathbf{pl} : \quad & \mathbf{m}(\mathbf{A}) = \sum_{B \subseteq A} (-1)^{|A|-|B|+1} \cdot pl(\bar{B}) & \mathbf{pl}(\mathbf{A}) = \sum_{B \cap A \neq \emptyset} m(B) \\
& \mathbf{m}(\emptyset) = 1 - pl(\Omega) & \mathbf{pl}(\emptyset) = 0. \\
\mathbf{m} \leftrightarrow \mathbf{b} : \quad & \mathbf{m}(\mathbf{A}) = \sum_{B \subseteq A} (-1)^{|A|-|B|} \cdot b(B) & \mathbf{b}(\mathbf{A}) = \sum_{B \subseteq A} m(B).
\end{aligned} \tag{2.5}$$

- **Plausibility:**

$$\mathbf{bel} \leftrightarrow \mathbf{pl} : \quad \mathbf{bel}(\mathbf{A}) = pl(\Omega) - pl(\bar{A}) \quad \mathbf{pl}(\mathbf{A}) = bel(\Omega) - bel(\bar{A}). \tag{2.6}$$

- **Commonality:**

$$\begin{aligned}
\mathbf{q} \leftrightarrow \mathbf{bel} : \quad & \mathbf{q}(\mathbf{A}) = \sum_{B \subseteq A} (-1)^{|B|} \cdot bel(\bar{B}) & \mathbf{bel}(\mathbf{A}) = \sum_{B \subseteq \bar{A}} (-1)^{|B|} \cdot q(B) \\
& \mathbf{q}(\emptyset) = 1 & \mathbf{bel}(\emptyset) = 0 \\
\mathbf{q} \leftrightarrow \mathbf{pl} : \quad & \mathbf{q}(\mathbf{A}) = \sum_{B \subseteq A} (-1)^{|B|+1} \cdot pl(B) & \mathbf{pl}(\mathbf{A}) = \sum_{\emptyset \neq B \subseteq A} (-1)^{|B|+1} \cdot q(B) \\
& \mathbf{q}(\emptyset) = 1 & \mathbf{pl}(\emptyset) = 1.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

- **Implicability:**

$$\begin{aligned}
\mathbf{b} \leftrightarrow \mathbf{q} : \quad & \mathbf{b}(\mathbf{A}) = \sum_{B \subseteq \bar{A}} (-1)^{|B|} \cdot q(B) & \mathbf{q}(\mathbf{A}) = \sum_{B \subseteq A} (-1)^{|B|} \cdot b(\bar{B}) \\
\mathbf{b} \leftrightarrow \mathbf{bel} : \quad & \mathbf{b}(\mathbf{A}) = bel(A) + m(\emptyset) & \mathbf{bel}(\mathbf{A}) = b(A) - m(\emptyset) \\
\mathbf{b} \leftrightarrow \mathbf{pl} : \quad & \mathbf{b}(\mathbf{A}) = 1 - pl(\bar{A}) & \mathbf{pl}(\mathbf{A}) = 1 - b(\bar{A}).
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Nei legami riportati abbiamo introdotto due nuove funzioni che sono la Commonality function e la Implicability function:

Commonality function:

$$\begin{aligned}
\mathbf{q} : 2^\Omega &\rightarrow [01] \\
\mathbf{q}(\mathbf{A}) &= \sum_{X \subseteq \Omega: A \subseteq X} m(X), \forall A \subseteq \Omega.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Implicability function:

$$\begin{aligned}
\mathbf{b} : 2^\Omega &\rightarrow [01] \\
\mathbf{b}(\mathbf{A}) &= bel(A) + m(\emptyset) = \sum_{X \subseteq \Omega: X \subseteq A} m(X), \quad \forall A \subseteq \Omega.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

La loro utilità dipende dal tipo di applicazione che si considera. In particolare analizzeremo l'importanza della implicability function e della commonality function quando si parlerà di belief condizionata e del calcolo della regola di combinazione delle belief. Il principale interesse per queste due funzioni è legato al fatto che mettono in luce diversi aspetti legati alla stessa belief ed inoltre risultano qualche volta computazionalmente più efficienti rispetto alle altre funzioni.

Sebbene non è stata riportata esplicitamente, abbiamo un'altro tipo di funzione che risulta comunque più elementare e che abbiamo già incontrato nel capitolo precedente: la *vacuous belief function*. Nella *TBM (Transferable Belief Model)* (dove il termine Transferable è legato all'aspetto dinamico di poter trasferire la belief da un corpo di prove ad un'altro in seguito all'arrivo di nuove informazioni nel sistema), tale funzione viene utilizzata per rappresentare la Completa Ignoranza. Infatti ricordo che il vantaggio della TBM rispetto al classico approccio Bayesiano risiede nella sua estrema flessibilità e nell'abilità di Rappresentare un qualsiasi stato di parziale beliefs fino al caso estremo di Totale Ignoranza.

Vacuous belief function:

$$\begin{aligned} \mathbf{m}(\Omega) &= \mathbf{1} & \mathbf{m}(A) &= \mathbf{0}; \forall A \subseteq \Omega, A \neq \Omega. \\ \mathbf{bel}(\Omega) &= \mathbf{1} & \mathbf{bel}(A) &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Esprime sostanzialmente che tutto quello che sò è che $w_0 \in \Omega$. Quindi con la TBM possiamo rappresentare ogni stato di belief, full ignorance, partial ignorance, probabilistic-additive beliefs o perfino full belief ($\mathbf{m}(A)=1$ corrispondente all'evento A certo). A tale proposito si consideri il seguente esempio:

Esempio: Si immagini che vi siano 3 proposizioni scritte su 3 pezzi di carta identificati con A,B e C. Sappiamo che solo una di queste proposizioni risulta vera, ma non sappiamo che tipo di proposizioni sono. L'unica informazione disponibile è il numero totale di proposizioni e l'etichetta scritta sui pezzi di carta che le racchiudono. Per la simmetria dei casi considerati, le beliefs secondo cui pensiamo che la verità possa risiedere in uno dei pezzi di carta è equivalente per ciascuna proposizione ovvero: $\mathbf{bel}(A)=\mathbf{bel}(B)=\mathbf{bel}(C)=\alpha$ per qualche $\alpha \in [0 \ 1]$, dove $\mathbf{bel}(A)$ è la belief che abbiamo relativamente al fatto che la proposizione scritta sul pezzo di carta A sia vera e così via

Inoltre non c'è motivo di credere o meglio di mettere maggiore (o minore) belief su C piuttosto che $A \cup B$ (ovvero che una delle proposizioni scritte su A oppure B sia vera): $\mathbf{bel}(A \cup B) = \mathbf{bel}(C) = \alpha$. Questo requisito ci porta alla seguente equazione: $\mathbf{bel}(A \cup B) = \mathbf{bel}(A) = \mathbf{bel}(B) = \alpha$. La vacuous belief function ($\alpha = 0$) è l'unica funzione che soddisfa queste identità (Mentre nessuna funzione di probabilità può soddisfare contemporaneamente queste uguaglianze).

2.2.1 The Principle of Minimal Commitment

Questo principio è stato inizialmente introdotto nel capitolo precedente in modo informale, ora lo riprenderemo per esprimerlo in maniera più formale e rigorosa.

Supponiamo che vi sia una sorgente S nel sistema e che le informazioni a nostra disposizione relative a $\Omega = \{a, b, c\}$, sono tali che $\mathbf{bel}_S(\{a\}) = 0.3$ e $\mathbf{bel}_S(\{b, c\}) = 0.5$ ma non abbiamo i valori corrispondenti agli altri sottoinsiemi di Ω . Immaginiamo inoltre che non si abbiano altre informazioni su Ω e che quindi siamo pronti ad utilizzare la Belief della sorgente come nostra unica informazione. A questo punto nasce la seguente domanda: *Come possiamo costruire le nostre Beliefs a partire dai valori vincolanti di queste parziali beliefs ?* Molte funzioni beliefs soddisfano tali vincoli. Se si adotta il principio secondo il quale i sottoinsiemi di Ω non dovrebbero avere più di quanto giustificato (*Excusatio non petita Accusatio manifesta* dicevano i latini), allora la nostra belief di Ω sarà tale che $m_{ME}(\{a\}) = 0.3$, $m_{ME}(\{b, c\}) = 0.5$ e $m_{ME}(\{a, b, c\}) = 0.2$. Tra tutte le funzioni belief che sono coerenti con i vincoli imposti dalla belief della sorgente che sono i valori di \mathbf{bel}_S ; \mathbf{bel}_{ME} è quella che assegna il più piccolo grado di belief ad ogni sottoinsieme di Ω . Il Principio che abbiamo appena invocato qui è noto come **Principle of Minimal Commitment**. Questo costituisce il nucleo base (core)

della TBM, dove i gradi della belief sono quelli delle prove giustificate. (In altre parole il principio dice di non giustificare più di quanto in realtà è richiesto rispetto alle prove disponibili).

Quando si utilizzano delle funzioni belief Non-Normalizzate (dove $m(\emptyset)$ può essere positivo), la definizione del principio si traduce in quella delle funzioni di Plausibility. Si considerino due funzioni di Plausibility pl_1 e pl_2 tali che:

$$pl_1(A) \leq pl_2(A) \quad \forall A \subseteq \Omega \quad (2.12)$$

In questo caso diciamo che pl_2 è meno soggetto ad un giudizio rispetto a pl_1 (oppure è soggetto ad un giudizio minore nel caso che la disuguaglianza sia stretta). La stessa classificazione viene estesa alle loro corrispondenti basic belief assignments e belief functions. Tra tutte le belief functions definite su Ω , la Belief function che in qualche maniera si pronuncia meno in assoluto rispetto alle altre (Least committed belief function) è proprio la Vacuous belief function dove la $pl(A) = 1 \quad \forall A \neq \emptyset$. Quindi vediamo ora come questo si traduce in termini di Belief functions. Il principio diventa:

$$\begin{aligned} b_1(A) &\leq b_2(A) & \forall A \subseteq \Omega \\ bel_1(A) + m_1(\emptyset) &\geq bel_2(A) + m_2(\emptyset) & \forall A \subseteq \Omega. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Il concetto di LEAST COMMITMENT consente la costruzione di UN ORDINE PARZIALE \sqsubseteq sull'insieme delle funzioni belief. Quindi scriviamo:

$$pl_1 \sqsubseteq pl_2 \quad (2.14)$$

Per indicare che pl_1 consente di fare delle affermazioni che sono più specifiche od uguali a quelle di pl_2 che risultano meno vincolanti. Ovviamente per analogia hanno il medesimo significato le seguente relazioni:

$$\begin{aligned} m_1 &\sqsubseteq m_2 \\ bel_1 &\sqsubseteq bel_2 \end{aligned} \quad (2.15)$$

Il Principle of Minimal Commitment consiste nel selezionare la funzione belief che si sbilancia meno in un'insieme di funzioni belief ugualmente motivate (ovvero valide e che soddisfano i vincoli imposti dal corpo delle prove). Il principio in sostanza formalizza l'idea che uno non dovrebbe sostenere più, di quanto è disponibile dalle prove note, ai sottoinsiemi del power set. E' se vogliamo una forma di scetticismo, prevenzione o comportamento conservativo nell'assegnazione delle belief. In un certo senso questo spirito non si allontana tanto da quello che gli studiosi nel campo probabilistico tentano di cogliere con il principio della massima entropia.

NB: Tale principio non funziona in tutte le possibili circostanze. Vi sono casi in cui l'insieme delle funzioni belief ammissibili con un certo insieme di vincoli non ammette sempre un'unica soluzione come least committed function.

A questo punto cerchiamo di formalizzare quanto nespoto. Formalmente Dubois e Prade hanno proposto 3 modi per ordinare le funzioni beleif. Sia m_1 e m_2 due bba's su Ω . La frase che dice ' m_1 is at least as committed as m_2 ' viene indicato con $m_1 \sqsubseteq m_2$ che corrisponde ad uno di questi x-ordering, dove x può assumere 3 valori. Allora m_2 si dice x-less committed than m_1 se:

- **pl-ordering:** se $pl_1(A) \leq pl_2(A) \quad \forall A \subseteq \Omega \leftrightarrow m_1 \sqsubseteq_{pl} m_2$
- **q-ordering:** se $q_1(A) \leq q_2(A) \quad \forall A \subseteq \Omega \leftrightarrow m_1 \sqsubseteq_q m_2$

- **s-ordering**: se m_1 è una specializzazione di $m_2 \forall A \subseteq \leftrightarrow m_1 \subseteq_s m_2$

In sostanza l'utilità di questo principio ci consente di costruire un'ordine parziale sull'insieme delle funzioni belief.

2.3 Möbius Transformation

La basic belief assignment è la cosiddetta Möbius Transform della belief function. L'insieme di tutte le altre trasformazioni tra le funzioni (m,b,q,pl) possono rientrare in questa categoria.

Sia una bba (m) definita su un frame of discernment $\Omega = \{a, b, c\}$. La relazione che lega la massa m alla implicability function è data dalla seguente relazione:

$$b(A) = \sum_{B \subseteq A} m(B) \quad \forall A \subseteq \Omega \quad (2.16)$$

Questa relazione è invocata dalla seguente equazione:

$$\mathbf{b} = \mathbf{BfrM} \cdot \mathbf{m} \quad (2.17)$$

Dove rispettivamente:

- **m**: è la bba. un vettore colonna con $2^{|\Omega|}$ elementi.
- **b**: è la implicability function ed è un vettore colonna con $2^{|\Omega|}$ elementi.
- **BfrM**: è una matrice di trasformazione tra la massa del sistema e la implicability function che ha dimensioni $2^{|\Omega|} \times 2^{|\Omega|}$. La quale è definita nella seguente maniera:

$$\begin{cases} \mathbf{BfrM}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \mathbf{1} & \text{iff } B \subseteq A \\ \mathbf{0} & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (2.18)$$

Dove A e B sono gli insiemi corrispondenti rispettivamente agli indici di riga e di colonna. (Quindi leggendo per colonna consideriamo la relazione $\subseteq =$ è contenuto. Mentre leggendo per riga consideriamo la relazione $\supseteq =$ contiene).

La Matrice completa è riportata in tabella 2.4, dove $\Omega = \{a, b, c\}$. Grazie all'ordine indotto dalla rappresentazione vettoriale è possibile costruire la matrice in modo immediato. La matrice si costruisce a partire dal blocco $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Questo blocco corrisponderebbe alla BfrM nel caso in cui $|\Omega| = 1$, vedi tabella 2.2. Dalla relazione appare chiaro che l'insieme vuoto \emptyset è contenuto in un qualsiasi sottoinsieme del Power set (colonna composta solo da 1), mentre l'insieme a è contenuto solo in se stesso in quanto coincide con l'insieme Universale Ω (Colonna con tutti elementi nulli ad eccezione dell'ultimo). Viceversa l'insieme vuoto non contiene gli altri sottoinsiemi del Power set ad eccezione ovviamente di se stesso, ed a contiene tutti i sottoinsiemi in quanto è l'insieme universale.

Per costruire la matrice quando $|\Omega| = 2$, replichiamo lo stesso blocco nell'angolo inferiore sinistro e destro della matrice $BfrM_{4 \times 4}$. La tabella riporta lo schema 2.3. Tale struttura dati ci consente di rappresentare un'insieme parzialmente ordinato (in algebra tali insiemi vengono indicati con Pos) rispetto all'operazione di inclusione tra insiemi. In particolare la matrice può essere letta per riga considerando lo schema riportato 2.19

	\emptyset	a
\emptyset	1	0
a	1	1

Tabella 2.2: **Matrix BfrM with $\Omega = \{a\}$**

	\emptyset	a	b	a,b
\emptyset	1	.	.	.
a	1	1	.	.
b	1	.	1	.
a,b	1	1	1	1

Tabella 2.3: **Matrix BfrM with $\Omega = \{a, b\}$**

che considera la relazione di contenere un certo sottoinsieme. Viceversa la lettura per colonna considera lo schema seguente 2.20 che considera la relazione di essere incluso in un certo sottoinsieme del power set.



Per ottenere la matrice quando $|\Omega| = 3$, utilizziamo la matrice ottenuta allo step precedente e ripetiamo la stessa procedura. Il Pattern adottato risulta quindi chiaro ed intuitivo; Adesso occorre formalizzarlo matematicamente in modo da poterlo implementare in un'opportuno linguaggio di programmazione. Lo strumento matematico utilizzato per estendere la matrice è la moltiplicazione di **Kronecker**:

Date 2 generiche matrici A e B si definisce **Kronecker Product** indicato con la seguente notazione $A_{m \times n} \otimes B$ la seguente operazione:

$$\begin{bmatrix} a_{11} \cdot B & a_{12} \cdot B & \dots & a_{1n} \cdot B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} \cdot B & a_{m2} \cdot B & \dots & a_{mn} \cdot B \end{bmatrix} \tag{2.21}$$

Quindi se A è una matrice $m \times n$ e B è una matrice $p \times q$, allora il prodotto $A_{m \times n} \otimes B_{p \times q}$ è una matrice $mp \times nq$. Naturalmente tale operazione non è commutativa. Si consideri il seguente esempio:

$$\overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}}^A \otimes \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}^B = \begin{bmatrix} 1 \cdot B & 2 \cdot B \\ 3 \cdot B & 1 \cdot B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 9 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.22}$$

	\emptyset	a	b	a,b	c	a,c	b,c	a,b,c
\emptyset	1
a	1	1
b	1	.	1
a,b	1	1	1	1
c	1	.	.	.	1	.	.	.
a,c	1	1	.	.	1	1	.	.
b,c	1	.	1	.	1	.	1	.
a,b,c	1	1	1	1	1	1	1	1

Tabella 2.4: **Matrix BfrM with $\Omega = \{a, b, c\}$**

Quindi, a partire da un'insieme di i elementi si può costruire un Pos di $i+1$ elementi essenzialmente moltiplicando il blocco iniziale per la matrice ottenuta con i elementi utilizzando la moltiplicazione di Kronecker.

$$BfrM_{i+1} = \mathbf{Kron}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, BfrM_i\right) \quad BfrM_i = 1 \tag{2.23}$$

Per scopi pratici la matrice di trasformazione che trasforma il vettore \mathbf{Y} nel vettore \mathbf{X} viene indicato con la seguente notazione $\mathbf{X}fr\mathbf{Y}$.(Dove l'acronimo *fr* significa function refinement) In particolare risulta che:

$$\begin{aligned} (\mathbf{X}fr\mathbf{Y}) \cdot (\mathbf{Y}fr\mathbf{Z}) &= ((\mathbf{X}fr\mathbf{Z})) \\ (\mathbf{X}fr\mathbf{Y}) \cdot (\mathbf{Y}fr\mathbf{X}) &= \mathbf{I} \end{aligned} \tag{2.24}$$

A questo punto risulta chiaro il significato della implicability function $b(A)$.(Come suggerisce la parola stessa, essa rappresenta quella porzione del corpo delle prove che riguarda l'evento A e tutti gli eventi da esso implicati; e' evidente che $b(\Omega)=1$). Si consideri il caso in cui $\Omega = \{a, b\}$ e $m(a)= 0.5$ ed $m(b)=0.5$.

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ 1 \end{pmatrix}}^b = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}^{BfrM_2} \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ 0 \end{pmatrix}}^{\sum_{A \in P(X)} m(A)=1} \tag{2.25}$$

Quindi l'implicability function $b(A)$, può essere considerata in un certo senso come la somma ponderata di tutti i cammini del Reticolo che partono dal nodo A e conducono al node base *i.e* l'evento $\{\emptyset\}$ (dove i pesi sono le masse attribuite ai sottoinsiemi del Power set) E' una particolarizzazione dell'evento A nei suoi sottoinsiemi. Analogamente possiamo ricavare le rispettive masse a partire dalla conoscenza del vettore b.

$$\mathbf{MfrB} : MfrB(A, B) = (-1)^{|A|-|B|} \quad se \quad B \subseteq A \quad = 0 \quad altrimenti \tag{2.26}$$

Consideriamo per il momento per semplicità il caso in cui $|\Omega| = 2$ [2.5](#):

	\emptyset	a	b	a,b
\emptyset	1	.	.	.
a	-1	1	.	.
b	-1	.	1	.
a,b	1	-1	-1	1

Tabella 2.5: **Matrix MfrB with $\Omega = \{a, b\}$**

	\emptyset	a	b	a,b
\emptyset	1	1	1	1
a	.	1	.	1
b	.	.	1	1
a,b	.	.	.	1

Tabella 2.6: **Matrix QfrM with $\Omega = \{a, b\}$**

Riprendendo l'esempio precedente risulta:

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ 0 \end{pmatrix}}^{\sum_{A \in P(X)} m(A)=1} = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}^{MfrB_2} \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ 1 \end{pmatrix}}^b \tag{2.27}$$

Compreso quindi l'utilità dell'implicability function, analizziamo ora il significato della **Commonality function** e del legame che ha con le masse del Power Set.

$$\mathbf{QfrM}: QfrM(A, B) = 1 \text{ se } A \subseteq B = 0 \text{ altrimenti} \tag{2.28}$$

Possiamo notare dalla tabella 2.6 che la matrice di trasformazione della commonality function è la trasposta della matrice di trasformazione della implicability function. Quindi analizzando semplicemente la matrice potremmo dire che il ruolo di lettura delle righe e delle colonne risulta invertito, ma l'aspetto principale è legato al prodotto di tale matrice per il vettore delle masse del Power Set. Infatti in questo caso piuttosto che considerare una particolarizzazione dell'insieme A sommando tutte le masse dei suoi sottoinsiemi, effettuiamo l'operazione opposta, ovvero sommiamo le masse di tutti i sottoinsiemi del Power set che comprendono A. Quindi andiamo sempre più generalizzando A fino ad arrivare al sottoinsieme Comune (ovvero che comprende tutti) che è l'insieme Universale Ω . Quindi abbiamo un cammino ponderato sul reticolo che parte da A ed arriva all'insieme Universale Ω . Per comprendere quanto è stato detto consideriamo il seguente esempio in cui abbiamo $\Omega = \{a, b\}$ e le masse del sistema sono rispettivamente $m(a)=0.7$ e $m(a,b)=0.3$. Quindi risulta:

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0.3 \\ 0.3 \end{pmatrix}}^q = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{QfrM_2} \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0.7 \\ 0 \\ 0.3 \end{pmatrix}}^{\sum_{A \in P(X)} m(A)=1} \tag{2.29}$$

Analogamente possiamo ricavare le masse a partire dalla conoscenza della commonality function mediante la seguente relazione:

$$\mathbf{MfrQ} : MfrQ(A, B) = (-1)^{|B|-|A|} \quad \text{se } A \subseteq B = 0 \quad \text{altrimenti} \quad (2.30)$$

E' chiaro che in questo caso la differenza delle cardinalità dei due insiemi è diversa rispetto al caso della implicability function, in quanto $|B| \geq |A|$, ovvero sono i superset di A. Per completare riportiamo le matrici di trasformazione che legano la Commonality function alla Implicability function:

$$\begin{aligned} \mathbf{BfrQ} : BfrQ(A, B) &= (-1)^{|B|} \quad \text{se } B \subseteq \bar{A} = 0 \quad \text{altrimenti} \\ \mathbf{QfrB} : QfrB(A, b) &= (-1)^{|B|} \quad \text{se } \bar{A} \subseteq B = 0 \quad \text{altrimenti.} \end{aligned} \quad (2.31)$$

Riportiamo di seguito le matrici di trasformazione delle varie funzioni nel caso in cui $|\Omega| = 3$.

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \mathbf{BfrM} \\ \left[\begin{array}{cccccccc} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & \cdot & \cdot & 1 & 1 & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & 1 & \cdot & 1 & \cdot & 1 & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \end{array} & \Leftrightarrow & \begin{array}{c} \mathbf{MfrB} \\ \left[\begin{array}{cccccccc} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & -1 & -1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & -1 & \cdot & \cdot & -1 & 1 & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & -1 & \cdot & -1 & \cdot & 1 & \cdot \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right] \end{array} \end{array} \quad (2.32)$$

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \mathbf{QfrM} \\ \left[\begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \cdot & 1 & \cdot & 1 & \cdot & 1 & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & 1 & 1 & \cdot & \cdot & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{array} \right] \end{array} & \Leftrightarrow & \begin{array}{c} \mathbf{MfrQ} \\ \left[\begin{array}{cccccccc} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ \cdot & 1 & \cdot & -1 & \cdot & -1 & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & 1 & -1 & \cdot & \cdot & -1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & -1 & -1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{array} \right] \end{array} \end{array} \quad (2.33)$$

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \mathbf{BfrQ} \\ \left[\begin{array}{cccccccc} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & \cdot & -1 & \cdot & -1 & \cdot & 1 & \cdot \\ 1 & -1 & \cdot & \cdot & -1 & 1 & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & -1 & -1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right] \end{array} & \Leftrightarrow & \begin{array}{c} \mathbf{QfrB} \\ \left[\begin{array}{cccccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & -1 & -1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & 1 & -1 & \cdot & \cdot & -1 & 1 \\ \cdot & 1 & \cdot & -1 & \cdot & -1 & \cdot & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right] \end{array} \end{array} \quad (2.34)$$

Tutte le trasformazioni si possono ottenere utilizzando un'unica matrice come ad esempio la \mathbf{BfrM} . Quindi data la matrice \mathbf{J} e la \mathbf{BfrM} , che indicheremo per semplicità con la lettera \mathbf{B} , si hanno le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} \mathbf{m} \leftrightarrow \mathbf{b} : \quad & \mathbf{B} & \mathbf{MfrB} &= B^{-1} \\ \mathbf{m} \leftrightarrow \mathbf{q} : \quad & \mathbf{QfrM} = J \cdot B \cdot J & \mathbf{MfrQ} &= J \cdot B^{-1} \cdot J \\ \mathbf{b} \leftrightarrow \mathbf{q} : \quad & \mathbf{BfrQ} = B \cdot J \cdot B^{-1} \cdot J & \mathbf{QfrB} &= J \cdot B \cdot J \cdot B^{-1}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

2.3.1 Le altre Trasformazioni

Abbiamo visto che la basic belief assignment non è altro che la funzione di pivot (ovvero una matrice composta da zeri ed uno) che consente di 'acchiappare' le masse del Power Set e descrive il body of evidence del nostro sistema. Inoltre abbiamo descritto il ruolo che giocano le funzioni \mathbf{b} (*implicability function*) e \mathbf{q} (*commonality function*), le quali ci consentono di esplorare il Reticolo e di stabilire le Relazioni che legano ciascun sottoinsieme del Power Set agli elementi focali del body of evidence. Nello specifico analizzando la simmetria tra le due matrici di trasformazione si nota che la \mathbf{b} è data dalla somma delle masse dal basso e \mathbf{q} dalle masse dall'alto; dove questo giro di parole altro non è che una scorciatoia per dire che $\mathbf{b}(\mathbf{A})$ è la somma di tutte le masse ottenute dai sottoinsiemi di A e simmetricamente $\mathbf{q}(\mathbf{A})$ è la somma di tutte le masse ottenute dai superset di A. A questo punto ci si domanda per quale ragione siano state trascurate le funzioni Bel e Pl.

Sebbene le funzioni di belief e plausibility abbiano un'immediata comprensione nella loro accezione generale, il loro utilizzo da un punto di vista matematico risulta poco conveniente in quanto si deve sempre gestire il caso dell'insieme vuoto. Comunque le relazioni che le definiscono sono le seguenti:

$$\begin{aligned} \mathbf{bel} &= \mathbf{b} - b(\emptyset) \cdot \mathbf{1} \\ \mathbf{pl} &= \mathbf{1} - \mathbf{J} \cdot \mathbf{b} \end{aligned} \quad (2.36)$$

quindi risulta:

$$\mathbf{BELfrM} = \mathbf{BfrM} - b(\emptyset) \cdot \mathbf{1} \cdot \mathbf{1}' \quad (2.37)$$

2.3.2 Matrix Patterns

Le principali trasformazioni considerate sono fondamentalmente basate sulla moltiplicazione di Kronecker per una matrice 2×2 composta da un'unico elemento nullo e gli altri elementi che risultano pari a 1 oppure -1; con l'ulteriore proprietà che i vettori con i termini positivi possono essere mappati (ovvero trasformati) in vettori con elementi positivi. Indichiamo questa particolare famiglia di matrici con \mathbf{PM} . Ad esempio siano a e b due scalari positivi, allora risulta:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} b \\ a-b \end{bmatrix} && \text{positivo} \leftrightarrow a > b. \\ \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -b \\ a-b \end{bmatrix} && -b < 0 \text{ non positivo.} \\ \begin{bmatrix} 0 & +1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} b \\ -a-b \end{bmatrix} && -a-b < 0 \text{ non positivo.} \end{aligned} \quad (2.38)$$

Dagli esempi appena considerati si nota che la prima matrice appartiene alla famiglia delle matrici \mathbf{PM} mentre le altre due non rientrano in tale categoria poichè mappano (trasformano) vettori con elementi positivi in vettori che presentano almeno un termine negativo. La famiglia delle possibili matrici di \mathbf{PM} deve soddisfare le seguenti proprietà di base che ne caratterizzano la STRUTTURA (Matrix Patterns):

- Sulla riga che ha lo 0 l'altro termine deve essere pari ad 1.
- Sulla riga senza 0 almeno un termine è -1.

Le possibili matrici che si possono costruire a partire da questo frame di base sono in tutto 12.

$$\begin{array}{ccc}
 \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}^{\mathbf{BfrM}\cdot\mathbf{J}} & \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}^{\mathbf{MfrB}\cdot\mathbf{J}} & \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}^{\mathbf{QfrB}} \\
 \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}^{\mathbf{BfrM}} & \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}^{\mathbf{QfrB}\cdot\mathbf{J}} & \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}^{\mathbf{MfrB}} \\
 \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}^{\mathbf{QfrM}} & \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}^{\mathbf{MfrQ}} & \overbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}^{\mathbf{BfrQ}\cdot\mathbf{J}} \\
 \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}^{\mathbf{QfrM}\cdot\mathbf{J}} & \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}^{\mathbf{BfrQ}} & \overbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}^{\mathbf{MfrQ}\cdot\mathbf{J}}
 \end{array} \tag{2.39}$$

2.4 Fast Möbius Transform

Abbiamo visto come attraverso la matrice di trasformazione sia possibile descrivere la conoscenza del nostro sistema in termini di (m,b,q,be,pl) . Quindi, noto il valore di una di queste funzioni è possibile ottenere il valore delle altre ricorrendo ad una moltiplicazione matriciale. Generalmente il dato iniziale di cui si dispone è il vettore delle masse relative ai sottoinsiemi del Power Set a partire dal quale è possibile lavorare su dei domini trasformati.

A questo punto ci si domanda per quale motivo dobbiamo passare dalla basic belief assignment ad una delle altre funzioni. La ragione è legata principalmente al fatto che i domini trasformati ci consentono di effettuare delle operazioni computazionalmente complesse nel dominio della bba in equivalenti operazioni molto più semplici negli altri domini. Risulta evidente che l'operazione a cui sto facendo riferimento è la combinazione delle masse coinvolta nella Dempster's Rule. Tuttavia il passaggio da una funzione all'altra richiede in generale la moltiplicazione di una matrice di dimensioni $2^{|\Omega|} \times 2^{|\Omega|}$ con i conseguenti oneri computazionali. Un modo per velocizzare tale procedura è quello di ricorrere alla cosiddetta **Fast Möbius Transform**, il che vedremo consentirà di ridurre i calcoli necessari per combinare le masse mediante la Regola di Dempster.

Questo metodo si basa in sostanza su due importanti fatti:

1. Il primo si basa su una *Generalizzazione della Trasformata di Fourier*.
2. Il secondo fatto fondamentale è che esiste anche una *Generalized Fast Fourier Transform*.

Per quanto riguarda il primo punto, Shafer ha dimostrato che esiste una rappresentazione equivalente della belief function (o analogamente della bba) nella quale la Dempster's Combination Rule si trasforma in un semplice prodotto. Questa rappresentazione prende il nome di **Commonality function**. Infatti, l'utilità di questa funzione è dovuta principalmente alla seguente semplice formula:

$$\forall A \in P(\Omega) : Q_{m_1 \oplus m_2}(A) = Q_{m_1}(A) \cdot Q_{m_2}(A) \tag{2.40}$$

Thoma ha dimostrato che la trasformazione $m \rightarrow Q_m$ denominata Möbius Transform è in effetti una trasformata generalizzata di Fourier. Infatti analogamente alla trasformata di Fourier, dove la convoluzione di due segnali nel dominio del tempo può essere espressa attraverso il prodotto delle loro rispettive trasformate; nella regola di combinazione delle masse, l'operazione di somma diretta può essere paragonata ad una convoluzione. In particolare la trasformata di Fourier viene utilizzata su funzioni definite su una struttura algebrica di Gruppo. Tale trasformata trasforma ciascuna funzione (definita su un Gruppo) in un'altra funzione (definita sullo stesso Gruppo) in modo tale da trasformare appunto il prodotto di convoluzione tra le due funzioni (indotto dall'operazione di gruppo) venga mappata in un semplice prodotto di funzioni.

In sostanza qui la storia è la stessa, con l'unica eccezione che le funzioni non sono definite su un Gruppo ma su un SemiGruppo $\langle P(\Omega), \cap \rangle$. La Dempster's Rule of Combination- Senza l'operazione di Normalizzazione- non è altro che il prodotto di convoluzione (indotto dall'operazione di \cap del semi-Gruppo) su uno spazio di funzioni definito su $\langle P(\Omega), \cap \rangle$.

Il secondo aspetto fondamentale è che esiste anche una **Generalized Fast Fourier Transform**, che fornisce un'algoritmo computazionalmente efficiente per il calcolo di $m \rightarrow Q_m$.

Adesso descriveremo tale algoritmo nel caso in cui si desideri effettuare la trasformazione da $m \rightarrow b$ nel caso $\Omega = \{a, b, c\}$, per poi generalizzare il passaggio da $m \rightarrow Q_m$ e poi da $m \leftarrow Q_m$ ovvero la trasformata inversa. Ricordo infatti che quando si parla di Trasformata di Möbius non si fa riferimento ad una sola funzione, ma ad una classe di funzioni (m,b,q); pertanto avremo anche le loro corrispondenti Fast Möbius Transform.

2.4.1 Implementazione della FMT

L'algoritmo per calcolare la FMT che trasforma la basic belief function nella commonality function è riportato in figura 2.2

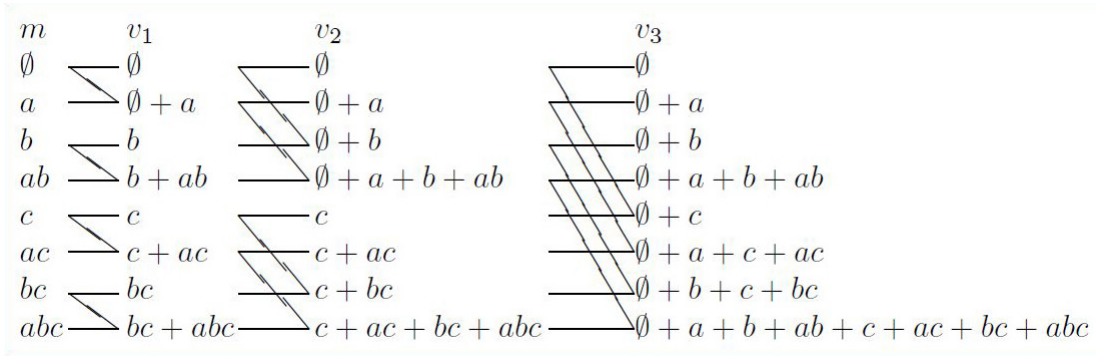


Figura 2.2: Möbius Transform bba to implicability function

Sia m una bba definita su un frame of discernment $\Omega = \{a, b, c\}$. La colonna \mathbf{m} elenca gli indici del vettore bba. Infatti, l'indice indica il valore dell'elemento del vettore che corrisponde a quell'indice. Quindi \mathbf{ab} indice $\mathbf{m(a,b)}$. (Abbiamo in sostanza tutte le masse relative ai sottoinsiemi del Power Set)

In modo iterativo, si costruiscono i vettori $v_i \ i = 1, \dots, n$ di lunghezza $2^{|\Omega|}$. Il trucco in sostanza consiste nel tracciare delle linee nella Figura 2.2 per $n=3$. Per ogni elemento del vettore v_{i-1} tracciamo una linea che lo collega con il vettore v_i (con $v_0 = m$).

1. Dopo di che un'altro collegamento viene disegnato a partire dagli elementi 1,3,5,7 di m agli elementi 2,4,6,8 di v_1 .
2. Dagli elementi 1,2,5,6 di v_1 agli elementi 3,4,7,8 di v_2 .
3. In fine dagli elementi 1,2,3,4 di v_2 agli elementi 5,6,7,8 di v_3 .

Dopo di che questi collegamenti vengono utilizzati come segue:

Il valore dell'elemento j -esimo del vettore successivo v_{i+1} è dato dalla somma dei valori degli elementi appartenenti al vettore precedente v_i collegati a j . Questo significa in pratica che i valori del vettore v_{i+1} sono ottenuti dal contributo di un solo elemento oppure dalla somma di due elementi. mostriamo esplicitamente il calcolo della figura 2.2. Calcoliamo v_1 : i valori delle componenti di v_1 si ottengono addizionando i valori delle componenti del vettore m che sono collegate a v_1 mediante una linea. Quindi:

$$\begin{aligned}
 v_1(\emptyset) &= m(\emptyset) \\
 v_1(a) &= m(\emptyset) + m(a) \\
 v_1(b) &= m(b) \\
 v_1(a, b) &= m(b) + m(a, b) \\
 &\vdots
 \end{aligned} \tag{2.41}$$

I simboli elencati nel vettore v_1 rappresentano i sottoinsiemi di m le cui masse sono incluse nei valori di v_1 .

Dopo di che costruiamo il vettore v_2 in modo del tutto analogo, sommando i valori delle componenti del vettore v_1 che sono collegati con una linea alle componenti di v_2 . Quindi $v_2(a, b)$ si ottiene sommando $v_1(a)$ e $v_1(a, b)$ e pertanto le masse sommate in $v_2(a, b)$ sono:

$$v_2(a, b) = m(\emptyset) + m(a) + m(b) + m(a, b)$$

Il vettore v_3 è costruito in modo del tutto analogo. Ad esempio:

$$\begin{aligned}
 v_3(a, c) &= v_2(a) + v_2(a, c) \\
 &= \overbrace{m(\emptyset) + m(a) + m(c) + m(a, c)}^{b(a, c)}
 \end{aligned}$$

Di seguito riportiamo la decomposizione della matrice che sta alla base della FMT:

$$\mathbf{BfrM} = \mathbf{M}_3 \cdot \mathbf{M}_2 \cdot \mathbf{M}_1 \tag{2.42}$$

dove le matrici M_i sono:

$$\begin{matrix}
 \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}}^{M_3} & & \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 \end{bmatrix}}^{M_2} \\
 & & \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}}^{M_1}
 \end{matrix} \tag{2.43}$$

Riportiamo ora la Rete che descrive l’algoritmo che consente di calcolare la commonality function a partire dal vettore delle masse [2.3](#)

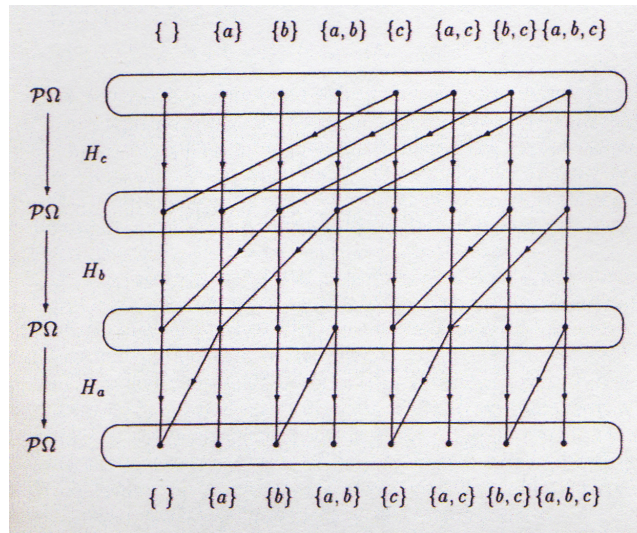


Figura 2.3: Möbius Transform bba to Commonality function

Questa Rete deve essere letta dall’alto verso il basso. La prima riga in sostanza prende le masse iniziali. Successivamente le masse vengono trasferite alla seconda riga seguendo le frecce, e così via. Fino ad arrivare all’ultima riga con una serie di numeri che non sono altro che i valori della commonality function dei rispettivi sottoinsiemi del Power Set. Analogamente possiamo calcolare la Trasformata inversa, ovvero $\mathbf{m} \leftarrow \mathbf{Q}_m$ descritta dalla figura seguente [2.4](#):

Questa volta le masse sono trasferite dalle frecce con la label(-1) devono essere pre-moltiplicate per -1.

Ora abbiamo tutto l’occorrente per calcolare il prodotto di due $\mathbf{bba}(\mathbf{m1})$ e $\mathbf{bba}(\mathbf{m2})$:

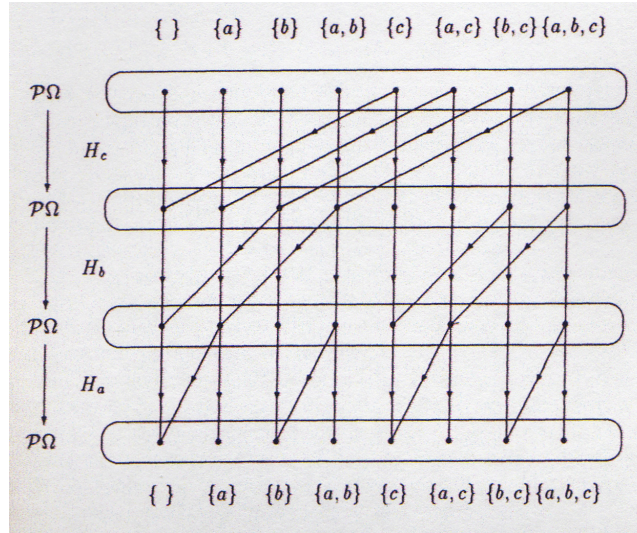


Figura 2.4: Inverse Möbius Transform Commonality function to bba

1. Calcolare le rispettive Commonality functions \mathbf{Q}_{m_1} e \mathbf{Q}_{m_2} utilizzando la Fast Möbius Transform
2. Moltiplicare \mathbf{Q}_{m_1} e \mathbf{Q}_{m_2} .
3. A partire dal risultato ottenuto allo step precedente è possibile calcolare la bpa corrispondente a $\mathbf{Q}_{m_1} \cdot \mathbf{Q}_{m_2}$ utilizzando la Fast Möbius Transform.

Questa procedura può essere schematizzata dal seguente diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc}
 (\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2) & \longrightarrow & (\mathbf{Q}_{m_1}, \mathbf{Q}_{m_2}) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \mathbf{m}_1 \oplus \mathbf{m}_2 & \longleftarrow & \mathbf{Q}_{m_1} \cdot \mathbf{Q}_{m_2}
 \end{array} \tag{2.44}$$

Vediamo quindi come si modifica la Regola di Combinazione delle masse di Dempster. Riportiamo la formula generale delle **Dempster's Rule of Combination**

$$m_{12}(A) = \frac{\sum_{B \cap C = A} m_1(B) \cdot m_2(C)}{1 - \sum_{B \cap C = \emptyset} m_1(B) \cdot m_2(C)}$$

La quale può essere espressa in modo equivalente nella seguente forma che mette in evidenza il fatto che Dempster ignora il conflitto esistente nel sistema, quindi la normalizzazione viene fatta considerando solo le prove coerenti del sistema:

$$m_{12}(A) = \frac{\sum_{B \cap C = A} m_1(B) \cdot m_2(C)}{\sum_{B \cap C \neq \emptyset} m_1(B) \cdot m_2(C)}$$

Quindi la **Commonality function** per la regola di combinazione delle masse diventa:

$$Q(\mathbf{A}) = \frac{Q_1(A) \cdot Q_2(A)}{\sum_{A \neq \emptyset} (-1)^{|A|+1} Q_1(A) \cdot Q_2(A)} \tag{2.45}$$

Quindi sebbene la belief e la plausibility function risultino più intuitive della Commonality function, esse risultano piuttosto sconvenienti per effettuare una **Conjunctive Combination Rule**.

Analogamente alla Commonality function, abbiamo la **Implicability function** che ci consente di effettuare una **Disjunctive Combination Rule**

$$B(\mathbf{A}) = \frac{B_1(A) \cdot B_2(A)}{\sum_{A \neq \emptyset} (-1)^{|A|+1} B_1(A) \cdot B_2(A)} \tag{2.46}$$

Nel paragrafo successivo riportiamo un'esempio che applica la Commonality function per calcolare la combinazione di due masse con la regola di Dempster.

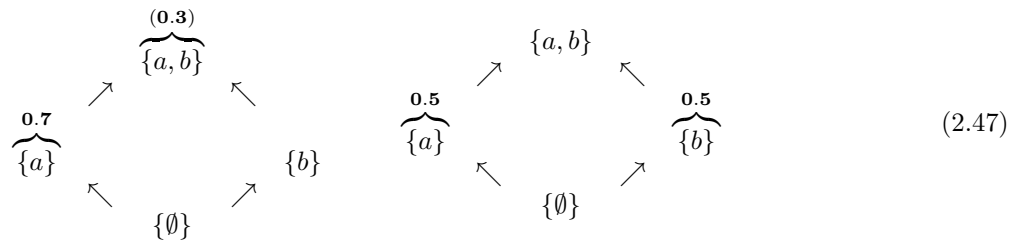
2.4.2 FMT e la Regola di combinazione di Dempster

Abbiamo visto nel paragrafo precedente come l'utilizzo della Fast Möbius Transform possa ridurre notevolmente il calcolo della combinazione delle masse e di conseguenza avere un'algoritmo che si adatti pure al controllo di processi in tempo-reale. Inoltre un'altra caratteristica importante, oltre alla complessità temporale è anche quella spaziale; infatti grazie alla rappresentazione matriciale del Power set è possibile occupare una memoria inferiore rispetto all'utilizzo di una Lista. Per avere un'idea tangibile dell'efficacia e dell'importanza che riveste la FMT consideriamo un semplice esempio che mette in luce come addirittura considerando un Power Set composto da due elementi si possa constatare tale sostanziale differenza.

Sia $\Omega = \{a, b\}$ il nostro frame of discernment, e siano S_1 e S_2 le nostre due sorgenti. Indichiamo con F_i l'insieme degli elementi focalicorrispondenti alla sorgente i -esima, che costituisce quindi il suo body of evidence; dove ogni elemento focale ha rispettivamente $m_i \neq 0$. In particolare abbiamo:

$$S_1 : F_1 = m(a) = 0.7, m(a, b) = 0.3 \quad S_2 : F_1 = m(a) = 0.5, m(b) = 0.5$$

I diagrammi di Hasse sono rappresentato di seguito 2.47:



Quindi applicando la regola di Dempster considerando una lista di elementi con un'algoritmo di enumerazione totale si ha la seguente tabella 2.7 che riporta la **somma diretta della combinazione delle masse senza normalizzazione per ogni sottoinsieme proprio del Power Set** :

A	B ∩ C = A	$m_1(B)$	$m_2(C)$	$m_1(B) \cdot m_2(C)$
$\{a, b\}$	$\{a, b\} \cap \{a, b\}$	0.3	0	0
	Total Σ			
$\{a\}$	$\{a\} \cap \{a\}$	0.7	0.5	0.35
	$\{a\} \cap \{a, b\}$	0.7	0	0
	$\{a, b\} \cap \{a\}$	0.3	0.5	0.15
Total Σ				0.50
$\{b\}$	$\{b\} \cap \{b\}$	0	0.5	0
	$\{b\} \cap \{a, b\}$	0	0	0
	$\{a, b\} \cap \{b\}$	0.3	0.5	0.15
Total Σ				0.15

Tabella 2.7: **Conjunctive Combination Rule** $|\Omega| = 2$

Conflitto	B ∩ C = ∅	$m_1(B)$	$m_2(C)$	$m_1(B) \cdot m_2(C)$
$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset\} \cap \{\emptyset\}$	0	0	0
	$\{\emptyset\} \cap \{\mathbf{a}\}$	0	0.5	0
	$\{\emptyset\} \cap \{\mathbf{b}\}$	0	0.5	0
	$\{\emptyset\} \cap \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$	0	0	0
	$\{\mathbf{a}\} \cap \{\emptyset\}$	0.7	0	0
	$\{\mathbf{b}\} \cap \{\emptyset\}$	0	0	0
	$\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\} \cap \{\emptyset\}$	0.3	0	0
	$\{\mathbf{a}\} \cap \{\mathbf{b}\}$	0.7	0.5	0.35
$\{\mathbf{b}\} \cap \{\mathbf{a}\}$	0	0.5	0	
Total Σ				0.35

Tabella 2.8: **Conjunctive Combination Rule Conflict** $|\Omega| = 2$

Per quanto riguarda il **conflitto esistente tra i due body of evidence** risulta 2.8:

Risulta evidente che possiamo calcolare la **costante di normalizzazione in due modi equivalenti** :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K} &= \mathbf{m}_{12}(\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}) + \mathbf{m}_{12}(\{\mathbf{a}\}) + \mathbf{m}_{12}(\{\mathbf{b}\}) = 0.50 + 0.15 = 0.65 \\
 &= \mathbf{1} - \mathbf{m}_{12}(\{\emptyset\}) = 1 - 0.35 = 0.65
 \end{aligned}
 \tag{2.48}$$

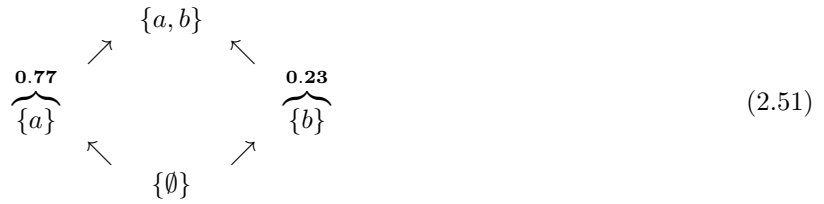
Naturalmente si sottolinea che normalizzare senza tener conto del conflitto significa assegnare massa pari a zero all'insieme vuoto, ovvero $m(\{\emptyset\}) = 0$. Quindi il nuovo vettore delle masse ottenuto dalla regola di combinazione di Dempster risulta:

$$\overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0.77 \\ 0.23 \\ 0 \end{bmatrix}}^m = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{m_{12}(\{\mathbf{a}\})}{K} \\ \frac{m_{12}(\{\mathbf{b}\})}{K} \\ \frac{m_{12}(\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\})}{K} \end{bmatrix}
 \tag{2.49}$$

E' chiaro che nell'effettuare l'operazione di divisione sono stati fatti degli arrotondamenti in modo da avere che la somma delle masse dei sottoinsiemi del Power Set risulti pari ad uno. Infatti risulta considerando un'approssimazione a due cifre decimali:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{m}(\mathbf{A}) &= \frac{0.50}{0.65} = 0.769 \simeq 0.77 & \mathbf{m}(\mathbf{B}) &= \frac{0.15}{0.65} = 0.230 \simeq 0.23 \\
 \sum m_i &= 1
 \end{aligned}
 \tag{2.50}$$

Quindi il diagramma di Hasse relativo al nuovo reticolo che descrive il Power set Aggiornato è il seguente :



Abbiamo visto come l'utilizzo di una lista di elementi sia proibitivo ed inefficiente per gestire le operazioni da effettuare sugli elementi del Power Set; una possibile alternativa potrebbe essere quella di utilizzare una rappresentazione posizionale di tipo bit-array (come è stata descritta all'inizio del capitolo) e considerare le operazioni di intersezione ed unione degli insiemi mediante le operazioni Booleane di OR ed AND. Tuttavia tale rappresentazione che è caratterizzata quindi da una coppia (\mathbf{a}, \mathbf{v}) , dove a è la rappresentazione binaria del focal element e $v = m(a)$ è il valore della massa assegnata a tale elemento, dipende dal numero degli elementi focali che caratterizzano il problema in questione. Risulta chiaro che non possiamo cambiare il numero delle coppie associate una belief function e lo spazio dipende dalla compattezza su cui sono distribuite le masse sui vari sottoinsiemi del Power Set. Una strada alternativa è quella di ricorrere alla TBM che verrà descritta in modo maggiormente dettagliato nel capitolo successivo, la quale ci consente di ricorrere alla trasformata di Möbius che ci semplifica notevolmente la vita. Nel caso in esame vedremo come attraverso una semplice moltiplicazione tra un vettore ed una matrice si possa aggiornare il vettore delle masse.

La prima operazione da effettuare è il passaggio dal dominio delle bba a quello delle Commonality functions mediante **la trasformata di Möbius**:

$\mathbf{m}_1 \rightarrow \mathbf{Q}_1$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0.3 \\ 0.3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{q}_1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ . & 1 & . & 1 \\ . & . & 1 & 1 \\ . & . & . & 1 \end{bmatrix}}_{\text{QfrM}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} . \\ 0.7 \\ . \\ 0.3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{m}_1} \tag{2.52}$$

$\mathbf{m}_2 \rightarrow \mathbf{Q}_2$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ . \end{bmatrix}}_{\mathbf{q}_2} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ . & 1 & . & 1 \\ . & . & 1 & 1 \\ . & . & . & 1 \end{bmatrix}}_{\text{QfrM}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} . \\ 0.5 \\ 0.5 \\ . \end{bmatrix}}_{\mathbf{m}_2} \tag{2.53}$$

Quindi la rappresentazione matriciale della **Conjunctive Combination Rule** diventa

$\mathbf{Q}_1 \cdot \mathbf{Q}_2$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 0.15 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{q}_1 \cap \mathbf{q}_2} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & . & . & . \\ . & 1 & . & . \\ . & . & 0.3 & . \\ . & . & . & 0.3 \end{bmatrix}}_{\text{Diag}(\mathbf{q}_1)} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{q}_2} \tag{2.54}$$

Dopo di che torniamo nel dominio delle bba mediante **la trasformata inversa di Möbius** per ottenere il vettore delle masse non normalizzato:

$Q_1 \cdot Q_2 \rightarrow m_1 \oplus m_2:$

$$\overbrace{\begin{bmatrix} 0.35 \\ 0.5 \\ 0.15 \\ . \end{bmatrix}}^{m_1 \oplus m_2} = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ . & 1 & . & -1 \\ . & . & 1 & -1 \\ . & . & . & 1 \end{bmatrix}}^{MfrQ} \cdot \overbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 0.15 \\ 0 \end{bmatrix}}^{Q_1 \cdot Q_2} \tag{2.55}$$

Naturalmente si osserva che $m(\emptyset) = 0.35 > 0$, come d'altronde era prevedibile data la presenza del conflitto tra le due sorgenti vedi 2.8. Tuttavia, nel considerare l'operazione di normalizzazione, Dempster ignora la massa dell'insieme vuoto e normalizza considerando solo le masse delle prove consistenti.

Quindi calcoliamo la costante di normalizzazione e normalizziamo il vettore delle masse:

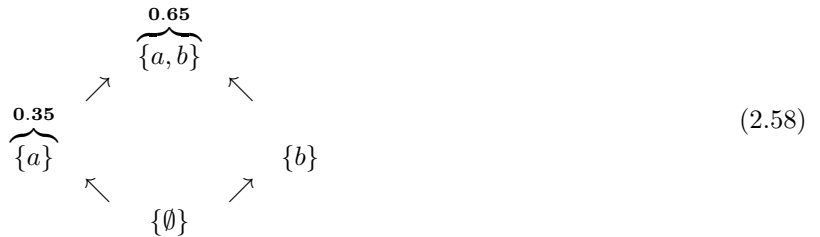
Calcolo della costante di normalizzazione:

$$\underbrace{0.65}_K = 1 - \underbrace{0.35}_{m(\emptyset)} \tag{2.56}$$

Normalizzazione del vettore delle masse:(Nell'effettuare l'operazione di normalizzazione si nota che abbiamo imposto la boundary condition imposta da Dempster ovvero $m(\emptyset) = 0$)

$$\overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0.77 \\ 0.23 \\ 0 \end{bmatrix}}^m = \underbrace{\frac{1}{0.65}}_{K^{-1}} \cdot \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 0.15 \\ 0 \end{bmatrix}}^{m_1 \oplus m_2 - \{\emptyset\}} \tag{2.57}$$

Dall'esempio precedente abbiamo appreso l'importanza che riveste la Commonality function nel calcolo della combinazione delle masse mediante l'operazione logica di AND che ricordo viene utilizzata in situazioni di Conjunctive Evidence.(Ovvero in una situazione in cui si reputa che la quantità di conflitto nel sistema sia trascurabile). Adesso analizzeremo la situazione in cui non si abbia una completa fiducia delle sorgenti presenti nel sistema e quindi si opta per l'utilizzo di una **Disjunctive Combination Rule**(che equivale all'operazione di OR).Nella Figura 2.9 riportiamo la tabella relativa alla combinazione delle masse e di seguito riportiamo il Diagramma di Hasse corrispondente all'operazione di Fusione 2.58



Naturalmente in questa situazione non ha senso parlare di normalizzazione e ovviamente la somma delle masse del Power Set deve risultare pari ad uno. Confrontando le due operazioni, si nota che nel caso dell'AND logico il sottoinsieme che potenzialmente può accumulare una quantità maggiore di massa dal sistema è ovviamente l'insieme vuoto *i.e* \emptyset (Da cui si comprende il motivo per cui tale Regola risulti pericolosa in presenza di conflitto tra le sorgenti d'informazione). Nello specifico osserviamo come nella soluzione relativa alla Conjunctive Rule of Combination la massa sia maggiormente attratta sull'unico elemento in comune tra le due sorgenti,

A	B ∪ C = A	$m_1(B)$	$m_2(C)$	$m_1(B) \cdot m_2(C)$
$\{a, b\}$	$\{a, b\} \cup \{a, b\}$	0.3	0	0
	$\{a, b\} \cup \{a\}$	0.3	0.5	0.15
	$\{a, b\} \cup \{b\}$	0.3	0.5	0.15
	$\{a, b\} \cup \{\emptyset\}$	0.3	0	0
	$\{a\} \cup \{a, b\}$	0.7	0	0
	$\{b\} \cup \{a, b\}$	0	0	0
	$\{\emptyset\} \cup \{a, b\}$	0	0	0
	$\{a\} \cup \{b\}$	0.7	0.5	0.35
	$\{b\} \cup \{a\}$	0	0.5	0
	Total ∑			
$\{a\}$	$\{a\} \cup \{a\}$	0.7	0.5	0.35
	$\{a\} \cup \{\emptyset\}$	0.7	0	0
	$\{\emptyset\} \cup \{a\}$	0	0.5	0
	Total ∑			
$\{b\}$	$\{b\} \cup \{b\}$	0	0.5	0
	$\{b\} \cup \{\emptyset\}$	0	0	0
	$\{\emptyset\} \cup \{b\}$	0	0	0
	Total ∑			

Tabella 2.9: **Disjunctive Combination Rule** $|\Omega| = 2$

mentre nella Disjunctive Rule of Combination tendiamo maggiormente a generalizzare i nostri sospetti e quindi la massa potenzialmente tende più a confluire verso l'insieme Universale.

Effettuiamo ora lo stesso calcolo lavorando nel dominio della implicability function aggirando l'ostacolo combinatorio del dominio delle masse.

La prima operazione da effettuare è il passaggio dal dominio delle bba a quello delle Implicability functions mediante **la trasformata di Möbius**:

$$\mathbf{m}_1 \rightarrow \mathbf{B}_1:$$

$$\overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0.7 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}^{\mathbf{b}_1} = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & . & . & . \\ 1 & 1 & . & . \\ 1 & . & 1 & . \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}^{\text{BfrM}} \cdot \overbrace{\begin{bmatrix} . \\ 0.7 \\ . \\ 0.3 \end{bmatrix}}^{\mathbf{m}_1} \tag{2.59}$$

$$\mathbf{m}_2 \rightarrow \mathbf{B}_2:$$

$$\overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}}^{\mathbf{b}_2} = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & . & . & . \\ 1 & 1 & . & . \\ 1 & . & 1 & . \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}^{\text{BfrM}} \cdot \overbrace{\begin{bmatrix} . \\ 0.5 \\ 0.5 \\ . \end{bmatrix}}^{\mathbf{m}_2} \tag{2.60}$$

Quindi la rappresentazione matriciale della **Disjunctive Combination Rule** diventa

$\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{B}_2$:

$$\overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0.35 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}^{\mathbf{b}_1 \cup \mathbf{b}_2} = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & . & . & . \\ . & 0.7 & . & . \\ . & . & 0 & . \\ . & . & . & 1 \end{bmatrix}}^{\text{Diag}(\mathbf{b}_1)} \cdot \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}}^{\mathbf{b}_2} \quad (2.61)$$

Dopo di che torniamo nel dominio delle bba mediante la **trasformata inversa di Möbius** per ottenere il vettore delle masse:

$\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{B}_2 \rightarrow \mathbf{m}_1 \cup \mathbf{m}_2$:

$$\overbrace{\begin{bmatrix} . \\ 0.35 \\ 0 \\ 0.65 \end{bmatrix}}^{\mathbf{m}_1 \cup \mathbf{m}_2} = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & . & . & . \\ -1 & 1 & . & . \\ -1 & . & 1 & . \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}}^{\text{MfrB}} \cdot \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0.35 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}^{\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{B}_2} \quad (2.62)$$

Quindi in generale, come dice Shafer, la **Commonality function** e la **Implicability function** ci consentono di muoverci liberamente tra i vari elementi del Power Set, a seconda se siamo fiduciosi o diffidenti delle informazioni provenienti dalle varie sorgenti di informazione.

2.5 Transferable Belief Model

Fino ad ora abbiamo visto come sia possibile lavorare in domini trasformati per combinare le masse di due sorgenti di informazione; tuttavia non abbiamo descritto formalmente cosa si cela nell' algoritmo di combinazione delle masse di Dempster; o per lo meno non è stato giustificato il motivo per cui interviene la commonality function e che ruolo gioca per il 'trasferimento' delle masse dei sottoinsiemi del Power Set da un un frame che caratterizza una certa configurazione ad un nuovo frame aggiornato in seguito all'acquisizione e fusione di nuove informazioni sul sistema. In effetti, la potenza del modello TBM, non è tanto la possibilità di rappresentare la conoscenza momentanea del sistema attraverso la belief function, ma la capacità di aggiornare lo stato attuale a partire da nuove prove disponibili.

Quando giunge una nuova informazione, la nostra belief deve essere aggiornata. Esistono sostanzialmente tre forme per effettuare l'UPDATING:

- **Expansion:** è l'aggiornamento della belief che porta ad un cambiamento dello stato del sistema che non apporta modifiche alle belief precedenti. In parole povere è un'ulteriore belief che si va ad aggiungere a quelle già esistenti. (Da cui si comprende il nome di Estensione legato al fatto di estendere la nostra conoscenza del sistema e quindi di restringere lo spettro dei potenziali candidati, si tratta appunto di una specializzazione).
- **Contraction:** come suggerisce la parola stessa, si tratta dell'operazione inversa dell'estensione. Infatti abbiamo l'eliminazione di alcune prove giustificata da ulteriori prove che supportano tale decisione. (Da cui si comprende il nome di Contrazione legato al fatto che si restringe la nostra conoscenza del sistema allargando quindi il numero dei potenziali sospetti, si tratta appunto di una generalizzazione o anche detta de-specializzazione).

- **Revision:** in fine abbiamo la Revisione o utilizzando un termine più appropriato si parla di Correzione. Infatti è il cambiamento della belief che nasce da nuove prove significative che si aggiungono a quelle esistenti ma che risultano non compatibili con alcune informazioni a nostra disposizione (quindi è necessario effettuare un'operazione di contrazione).

Di seguito introdurremo i concetti e le strutture algebriche che stanno alla base di queste tre forme di aggiornamento; prima però occorre dare qualche ulteriore definizione che ci consentirà di trasformare il nostro vecchio vettore delle masse in uno nuovo (ovvero aggiornato).

2.5.1 Trasformazioni di bba in altre bba

Una volta definito il frame of discernment Ω , è chiaro che esistono infiniti modi per assegnare le masse ai vari sottoinsiemi del Power set 2^Ω ; per cui possiamo costruire infiniti vettori delle masse, ognuno dei quali è associato ad un particolare frame del Power Set. Indichiamo quindi questo spazio con \mathcal{M}^Ω , se ad esempio consideriamo $|\Omega| = 2$ allora $\mathcal{M}^\Omega \subset \mathbb{R}^4$. È importante ricordare che non posso scegliere in modo totalmente arbitrario il vettore delle masse ma devo attenermi al fatto che la somma delle masse dei sottoinsiemi del Power Set sia pari ad uno e che quindi il valore di una componente dipende dalle altre; quindi \mathcal{M}^Ω è un sottospazio di $\mathbb{R}^{|\Omega|}$.

A questo punto ci si domanda se sia possibile passare da un frame ad un'altro mediante un'opportuna trasformazione. La risposta è affermativa e questo è legato al fatto che il nostro dominio ha la potenza del continuo. In particolare detti \mathbf{m}_1 e \mathbf{m}_2 due generici vettori di tale spazio. $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2 \in \mathcal{M}^\Omega$ possiamo determinare una matrice \mathbf{M} tale che:

$$\mathbf{m}_2 = \mathbf{M} \cdot \mathbf{m}_1 \quad (2.63)$$

Chiaramente una soluzione banale si ottiene nel caso in cui:

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_2 &= \mathbf{M} \cdot \mathbf{m}_1 \quad \text{se } \mathbf{1}' \cdot \mathbf{m}_1 = 1 \text{ AND } \mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{1}' = \mathbf{m}_2 \\ &= \underbrace{\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{1}'}_{\mathbf{M}} \cdot \mathbf{m}_1 \end{aligned} \quad (2.64)$$

Data la natura dello spazio su cui sono definite le masse del nostro sistema, risulta evidente che le matrici che consentono di effettuare l'isomorfismo ($\mathbb{R}^{2^{|\Omega|}} \rightarrow \mathbb{R}^{2^{|\Omega|}}$ con $\mathbf{m} \in [0 \ 1]$ e $\sum_{A \subseteq \Omega} m(A) = 1$), non possono essere del tutto arbitrarie ma devono assumere una particolare forma.

In particolare l'insieme di queste matrici viene indicato con \mathcal{SM}_Ω , e le matrici che appartengono a tale insieme si definiscono Matrici Stocastiche (dove il termine stocastico è legato alla natura del nostro spazio probabilistico su cui sono definite).

Definizione 2.1 Una *Matrice Stocastica* \mathcal{SM}_Ω è una matrice quadrata $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ definita su $2^{|\Omega|} \times 2^{|\Omega|}$ tale che:

$$\begin{aligned} a_{ij} &\geq 0 \quad \sum_i a_{ij} = 1 \quad \forall j \\ S(B, A) &\geq 0 \quad \sum_{B \subseteq A} S(B, A) = 1 \end{aligned} \quad (2.65)$$

In sostanza dalla definizione emerge che tali matrici non possono avere elementi negativi (d'altro canto il vettore delle masse è non negativo) ed inoltre la somma degli elementi di ciascuna colonna deve essere pari ad uno (questa proprietà è legata al fatto che la somma di tutte le masse del Power Set deve essere pari ad uno).

2.5.2 Specializzazioni and Generalizzazioni

Nel caso in cui la fase di Updating prevede un'operazione di **Expansion**, ogni bbm $\mathbf{m}(A)$ per $A \subseteq \Omega$ viene distribuita in qualche modo tra i sottoinsiemi di A (compreso l'insieme vuoto \emptyset). Questo trasferimento della belief può essere descritto dalla matrice di specializzazione \mathbf{S} che è una matrice stocastica.

Definizione 2.2 Una matrice di specializzazione $\mathbf{S} = [s(A, B)]$ $A, B \subseteq \Omega$ è una matrice stocastica $\mathbf{S} \in \mathcal{SM}_\Omega$ con la particolarità che i coefficienti che la caratterizzano risultino tali che:

$$\mathbf{S} \in \mathcal{SM}_\Omega \quad \mathbf{S}(A, B) = 0 \quad \forall A \not\subseteq B \quad (2.66)$$

Quindi gli elementi $\mathbf{S}(A, B)$ sono nulli se $A \not\subseteq B$ altrimenti $\mathbf{S}(A, B)$ è la parte della bbm $\mathbf{m}(B)$ che è stata trasferita a A . Sia m_1 la nostra bba iniziale su Ω , allora scriviamo:

$$m_2 = m_1 \cdot \mathbf{S}$$

per indicare che m_2 è frutto dell'applicazione della matrice di Specializzazione \mathbf{S} a m_1 . Pertanto si dice che \mathbf{m}_2 è una Specializzazione di \mathbf{m}_1 ; m_2 può essere calcolata attraverso una semplice moltiplicazione del vettore m_1 per la matrice S .

Abbiamo detto che esiste anche un'operazione inversa della Expansion, che è la **Contraction** la quale è sostanzialmente una **de-Specializzazione**. Può essere caratterizzata dalla matrice ottenuta invertendo la matrice di Specializzazione. Possiamo quindi definire una matrice **G De-Specialization Matrix** o anche nota come **Generalization Matrix**.

Definizione 2.3 Una matrice di generalizzazione $\mathbf{G} = [g(A, B)]$ $A, B \subseteq \Omega$ è una matrice stocastica $\mathbf{G} \in \mathcal{SM}_\Omega$ i cui coefficienti sono tali che:

$$\mathbf{G} \in \mathcal{SM}_\Omega \quad \mathbf{G}(A, B) = 0 \quad \forall B \not\subseteq A \quad (2.67)$$

Quindi gli elementi $\mathbf{G}(A, B)$ sono nulli se $B \not\subseteq A$ altrimenti $\mathbf{G}(A, B)$ è la parte di bbm $\mathbf{m}(A)$ che è stata trasferita a B che è un superset.

Queste due definizioni sono frutto della seguente proprietà:

Se $\mathbf{m}_1 \in \mathcal{M}^\Omega$ e $\mathbf{m}_2 = \mathbf{S} \cdot \mathbf{m}_1$, allora le masse corrispondenti al vettore m_1 'fluiscono', ovvero sgocciolano in m_2 e questo è ciò che sostanzialmente si intende che per ogni $A \subseteq \Omega$, la massa $m_1(A)$ è distribuita tra i sottoinsiemi di A quando costruiamo il vettore delle masse m_2 (che appunto riflette la redistribuzione delle masse tra i sottoinsiemi), una conseguenza importante di questa proprietà è che $b_2 \geq b_1$ e $q_2 \leq q_1$. (perchè l'operazione di specializzazione porta ad implicare qualcosa in più sui sottoinsiemi ed ovviamente a generalizzare meno, in altre parole ci avviciniamo maggiormente ai singleton del Power Set). Risulta chiaro che per la Generalizzazione avviene esattamente l'opposto, ovvero le masse tendono a salire verso l'insieme universale Ω .

Per avere un'idea riportiamo due esempi di queste matrici.

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & .3 & .2 & .4 & .4 & .2 & .1 & .1 \\ . & .7 & . & .1 & . & .1 & . & .1 \\ . & . & .8 & .2 & . & . & .3 & .2 \\ . & . & . & .3 & . & . & . & .1 \\ . & . & . & . & .6 & .4 & .3 & .2 \\ . & . & . & . & . & .3 & . & .1 \\ . & . & . & . & . & . & .3 & .1 \\ . & . & . & . & . & . & . & .1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} .1 & . & . & . & . & . & . & . \\ .1 & .3 & . & . & . & . & . & . \\ .1 & . & .3 & . & . & . & . & . \\ .2 & .3 & .4 & .6 & . & . & . & . \\ .1 & . & . & . & .3 & . & . & . \\ .2 & .3 & . & . & .2 & .8 & . & . \\ .1 & . & .1 & . & .1 & . & .7 & . \\ .1 & .1 & .2 & .4 & .4 & .2 & .3 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

Si consideri ad esempio una situazione di totale ignoranza e vediamo come il vettore delle masse viene aggiornato come la matrice \mathbf{S} che abbiamo scelto:

$$\begin{matrix} \mathbf{m}_2 \\ \left[\begin{array}{c} .1 \\ .1 \\ .2 \\ .1 \\ .2 \\ .1 \\ .1 \\ .1 \\ .1 \end{array} \right] \end{matrix} = \begin{matrix} \mathbf{S} \\ \left[\begin{array}{cccccccc} 1 & .3 & .2 & .4 & .4 & .2 & .1 & .1 \\ . & .7 & . & .1 & . & .1 & . & .1 \\ . & . & .8 & .2 & . & . & .3 & .2 \\ . & . & . & .3 & . & . & . & .1 \\ . & . & . & . & .6 & .4 & .3 & .2 \\ . & . & . & . & . & .3 & . & .1 \\ . & . & . & . & . & . & .3 & .1 \\ . & . & . & . & . & . & . & .1 \end{array} \right] \end{matrix} \cdot \begin{matrix} \mathbf{m}_1 \\ \left[\begin{array}{c} . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ 1 \end{array} \right] \end{matrix}$$

Da questa trasformazione appare che vi sia maggiore belief nell'evento $\{b, c\}$ piuttosto che in $\{a, b\}$ e $\{a, c\}$. Consideriamo ora la matrice di generalizzazione che osserviamo è stata ottenuta dalla seguente relazione $\mathbf{G} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{J}$:

$$\begin{matrix} \mathbf{m}_2 \\ \left[\begin{array}{c} . \\ . \\ . \\ . \\ .3 \\ .2 \\ .1 \\ .4 \end{array} \right] \end{matrix} = \begin{matrix} \mathbf{S} \\ \left[\begin{array}{cccccccc} .1 & . & . & . & . & . & . & . \\ .1 & .3 & . & . & . & . & . & . \\ .1 & . & .3 & . & . & . & . & . \\ .2 & .3 & .4 & .6 & . & . & . & . \\ .1 & . & . & . & .3 & . & . & . \\ .2 & .3 & . & . & .2 & .8 & . & . \\ .1 & . & .1 & . & .1 & . & .7 & . \\ .1 & .1 & .2 & .4 & .4 & .2 & .3 & 1 \end{array} \right] \end{matrix} \cdot \begin{matrix} \mathbf{m}_1 \\ \left[\begin{array}{c} . \\ . \\ . \\ . \\ 1 \\ . \\ . \\ . \end{array} \right] \end{matrix}$$

In questo caso risulta evidente (sebbene non riporto esplicitamente i casi in cui considero la certezza di a e di b) come l'evento $\{c\}$ venga maggiormente generalizzato.

Teorema 2.1 *Sia $m_1 \in \mathcal{M}^\Omega$, sia \mathbf{S} una matrice di specializzazione e \mathbf{G} una matrice di generalizzazione. Sia $\mathbf{m}_2 = \mathbf{S} \cdot \mathbf{m}_1$ e $\mathbf{m}_3 = \mathbf{G} \cdot \mathbf{m}_1$ allora $\mathbf{b}_2 \geq \mathbf{b}_1, \mathbf{q}_2 \leq \mathbf{q}_1$ e $\mathbf{b}_3 \leq \mathbf{b}_1, \mathbf{q}_3 \geq \mathbf{q}_1$.*

Data una generica coppia $m_1, m_2 \in \mathcal{M}^\Omega$ possiamo sempre trovare una matrice di specializzazione \mathbf{S} ed una di generalizzazione \mathbf{G} tale che:

$$\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2 \in \mathcal{M}^\Omega \quad \mathbf{m}_2 = (\mathbf{S} \cdot \mathbf{G}) \cdot \mathbf{m}_1 \quad (2.69)$$

In altre parole se voglio trasformare il vettore delle masse m_1 nel vettore delle masse m_2 allora la matrice di trasformazione è data dal prodotto di una matrice di specializzazione e di una di generalizzazione. Ad esempio noti m_1 e m_2 definiti su un frame of discernment $2^{|\Omega|}$ dove $\Omega = \{a, b\}$ abbiamo:

$$\mathbf{m}_2 = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & m_2(\emptyset) \\ \cdot & \cdot & \cdot & m_2(a) \\ \cdot & \cdot & \cdot & m_2(b) \\ \cdot & \cdot & \cdot & m_2(\Omega) \end{bmatrix}}^{\mathbf{S}} \cdot \overbrace{\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}}^{\mathbf{G}} \cdot \mathbf{m}_1 \quad (2.70)$$

In modo del tutto analogo data una generica coppia $m_1, m_2 \in \mathcal{M}^\Omega$ possiamo sempre trovare una matrice di specializzazione \mathbf{S} ed una di generalizzazione \mathbf{G} tale che $\mathbf{m}_2 = \mathbf{G} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{m}_1$.

$$\mathbf{m}_2 = \overbrace{\begin{bmatrix} m_2(\emptyset) & \cdot & \cdot & \cdot(\emptyset) \\ m_2(a) & \cdot & \cdot & \cdot \\ m_2(b) & \cdot & \cdot & \cdot \\ m_2(\Omega) & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}}^{\mathbf{G}} \cdot \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}}^{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{m}_1 \quad (2.71)$$

2.5.3 Revision

La Revision di una bba m_1 data da una nuova prova $\mathcal{E} \sqsubseteq$ può essere sempre rappresentata da una matrice stocastica $\mathcal{M}(\mathcal{E}, \mathbf{m}_1)$ che trasforma m_1 in $m_1[\mathcal{E}]$:

$$m_1[\mathcal{E}] = \mathcal{M}(\mathcal{E}, \mathbf{m}_1) \cdot m_1 \quad (2.72)$$

Se il valore della matrice dipende solo da \mathcal{E} e non da m_1 (in altre parole tutti i valori delle masse di m_1 diversi da zero relativi ad una certa proposizione vengono corretti) possiamo scrivere:

$$m_1[\mathcal{E}] = \mathcal{M}(\mathcal{E}) \cdot m_1 \quad (2.73)$$

In questo caso diciamo che le prove fornite da m_1 e da $\mathcal{E} \sqsubseteq$ sono prove 'distinte'. In alcune circostanze la $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ è una matrice di specializzazione oppure una matrice di generalizzazione.

Quando la **Revision** è una specializzazione la chiamiamo conjunctive Revision dato che le beliefs si concentrano maggiormente su alcuni elementi piuttosto che altri (ovviamente mi riferisco ai focal elements di m_1 relativi alla proposizione considerata). Nel caso di una generalizzazione abbiamo una disjunctive Revision dato che le masse si sparpagliano in modo diffuso sui focal elements di m_1 . Questa terminologia deriva dall'analogia con l'operazione di AND che crea insiemi più piccoli e quella di OR che da luogo ad insiemi più grandi.

Inoltre diciamo che m_2 è una specializzazione di m_1 se esiste una matrice di specializzazione \mathbf{S} tale che:

$$\mathbf{m}_2 = \mathbf{S} \cdot \mathbf{m}_1$$

Diciamo in fine che m_2 è una generalizzazione di m_1 se esiste una matrice di generalizzazione \mathbf{G} tale che:

$$\mathbf{m}_2 = \mathbf{G} \cdot \mathbf{m}_1$$

Quindi qualsiasi cambiamento legato all'operazione di espansione, contrazione o anche Revisione è rappresentato da un **operatore di Updating**, il quale è dato dalla combinazione delle matrici di Specializzazione e Generalizzazione.

2.5.4 Dempster's Rule of Conditioning

Oltre la rappresentazione delle beliefs come belief function, il principale componente della TBM è l'utilizzo della Dempster's Rule of Conditioning per rappresentare l'impatto di una nuova prova che condiziona la nostra conoscenza. Condizionare la nostra belief relativamente ad un sottoinsieme $A \subseteq \Omega$ significa che riteniamo vera la nuova prova che condiziona la belief di A e viene indicata con E_A . Questa informazione in generale significa che la risposta si trova tra le proposizioni di A, ma implica qualcosa in più rispetto a quest'ultima constatazione. Ovvero, sostiene che Ω risulta esaustivo per la nostra realtà d'interesse, in opposizione invece a quella che viene definita the open world assumption, che rispecchia l'idea che Ω potrebbe non contenere la verità. Inoltre questo presuppone che non esista conflitto tra le sorgenti di informazione del sistema il che si tradurrebbe nell'aver $m(\emptyset) = 0$ e $bel(\Omega) = 1$. Tuttavia va ricordato che questa condizione non è richiesta dalla TBM ed è effettivamente questa la principale differenza tra la TBM ed il modello proposto da Shafer. Comunque, si può facilmente comprendere che la funzione di belief conditioning è effettivamente un'operazione di Updating di tipo Revision, poichè in sostanza si tratta di correggere le nostre pre-esistenti convinzioni con un'ulteriore raffinamento (ovvero al massimo possiamo stravolgere i valori dei focal elements relativi ad una data proposizione).

Supponiamo di possedere una certa belief su Ω rappresentata dalla bba (m) attribuita ai sottoinsiemi di $2^{|\Omega|}$. Immaginiamo che ci vengono fornite ulteriori prove che costituiscono la nuova informazione disponibile, la quale sostiene che l'evento effettivo non risiede in \bar{A} . Allora la massa $m(B)$ che inizialmente sosteneva che la verità risiedesse in B adesso sostiene che appartiene a $B \cap A$ dato che \bar{A} è stato escluso dalla nuova acquisizione. Allora $m(B)$ viene trasferita a $B \cap A$ dopo l'operazione di conditioning di A. Tale operazione ci conduce alla **Conditional belief assignment function** m_A , con appunto bel_A e pl_A date da:

$$\begin{aligned} m_A &= \sum_{C \subseteq \bar{A}} m(B \cap C) \\ bel_A &= bel(B \cup \bar{A}) - bel(\bar{A}) \\ pl_A &= pl(B \cap A) \end{aligned} \quad (2.74)$$

Vediamo quindi di formalizzare quanto riportato in una forma matriciale:

Sia m_1 una bba e sia $\mathcal{S}(m_1)$ l'insieme delle bba che si ottengono come specializzazione di m_1 , ovvero:

$$m_1 : \mathcal{S}(m_1) = \{m : \exists \text{ specialization matrix } \mathcal{S}, m = \mathcal{S} \cdot m_1\}$$

In questo insieme prendiamo in considerazione le bba m_2 che sono una specializzazione di m_1 tali che $pl_2(\bar{A}) = 0$, e tra tutte queste selezioniamo quella che assegna il più piccolo grado di belief ai sottoinsiemi di Ω ovvero seguendo il Least Commitment Principle, ed indichiamo tale vettore con m^* . Quindi risulta $b^* \leq b \forall m \in \mathcal{S}(m_1)$ con $pl(\bar{A}) = 0$. La soluzione m^* è unica: quanto appena riportato è quello che si ottiene dalla Dempster's Rule of conditioning (senza normalizzazione) quando è condizionato da A.

$$m^*(B) = m_1[A](B) = \sum_{C \subseteq \bar{A}} m_1(B \cup C), \quad \forall B \subseteq A \quad (2.75)$$

Le altre masse sono nulle. (Abbiamo indicato l'evento condizionato tra parentesi quadre $\forall m, b, q, bel, pl$). La corrispondente matrice di specializzazione per $\Omega = \{a, b, c\}$ con $A = \{a, b\}$ e quindi $\bar{A} = \{\{b\}, \{c\}, \{ac\}, \{bc\}, \{a, b, c\}\}$.

$$\begin{bmatrix} m(\emptyset) + m(C) \\ m(A) + m(A, C) \\ m(B) + m(B, C) \\ m(A, B) + m(A, B, C) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m(\emptyset) \\ m(A) \\ m(B) \\ m(A, B) \\ m(C) \\ m(A, C) \\ m(B, C) \\ m(A, B, C) \end{bmatrix} \quad (2.76)$$

Da questo esempio vediamo che la plausibility di \bar{AB} è diventata zero, ovvero le masse corrispondenti ai sottoinsiemi propri di \bar{AB} sono diventate zero e sono fluite verso il basso e quindi abbiamo una specializzazione. Tale specializzazione però fa confluire ciascuna massa al primo sottoinsieme del Power set che appartiene ad $\{AB\}$ in altre parole ci fermiamo su un boundary dettato dal Least Commitment Principle. (Questo è facilmente visibile sul diagramma di Hasse che descrive il Reticolo in questione).

Quindi tale matrice mostra che la Revision ottenuta dalla Dempster's Rule of Conditioning corrisponde a costruire la Least Committed function che è una specializzazione della iniziale bba ed in questo modo la plausibility di \bar{A} diventa nulla. Questo è esattamente ciò che si intende per conditioning di A, ovvero che l'evento \bar{A} è impossibile, la sua plausibilità deve diventare zero e tra tutti gli eventi condizionati prendiamo quello che fornisce la Least Committed Solution.

L'operazione duale di questa specializzazione condizionata, è naturalmente una generalizzazione che equivale ad un'operazione di De-specializzazione. Questa equivale ad una condizione di De-Conditioning su $\{A, B\}$. Le masse $m_1(X)$ per $X \subseteq \{A, B\}$ vengono trasferite ad $X \cup \{C\}$. questo è ciò che otteniamo se partiamo con il condizionamento di \bar{C} , allora decidiamo di fare un passo indietro o detto in termini di copertura del reticolo effettuiamo un backtrack, per cancellare la conditioning revision, ma tutto ciò che possiamo fare è quello di prendere la Least Committed bba tra tutte le generalizzazioni di m_1 che soddisfano $pl_2(C) = 1$. Questo processo di De-conditioning non si incontra molto spesso nella teoria delle probabilità e non può essere realizzato senza fare ulteriori ipotesi sugli eventi ma soprattutto sulle funzioni di distribuzione.

Quindi siano \mathbf{C}_A e \mathbf{D}_A rispettivamente le matrici che rappresentano il **Conditioning** ed il **De-Conditioning** su A. Allora nel caso considerato precedentemente otteniamo la De-conditioning matrix effettuando la seguente trasformazione:

$$D_A = J \cdot C_A \cdot J$$

In poche parole la C_A mi consente di fare un passo avanti nella mia valutazione, mentre la D_A mi fa tornare indietro sulle mie decisioni.

Inoltre riportiamo di seguito alcune proprietà relative a queste matrici:

- $\mathbf{C}_A \cdot \mathbf{C}_B = \mathbf{C}_{A \cap B}$
- $\mathbf{C}_A \cdot \mathbf{C}_A = \mathbf{C}_A$
- $\mathbf{D}_A \cdot \mathbf{D}_B = \mathbf{D}_{A \cup B}$
- $\mathbf{D}_A \cdot \mathbf{D}_A = \mathbf{D}_A$

- $C_A \cdot D_A = C_A$
- $D_A \cdot C_A = D_A$
- $C_A \cdot D_A \cdot C_A = C_A$
- $D_A \cdot C_A \cdot D_A = D_A$

2.5.5 Conjunctive And Disjunctive Rule of Combination

La **Conjunctive Revision** di una bba ottenuta da una distinta prova acquisita dal nostro sistema può essere realizzata attraverso una matrice di specializzazione.

Supponiamo di avere diverse informazioni provenienti da prove differenti ed ognuna è rappresentata da una matrice di Specializzazione. Una vera regola di Combinazione di tipo Conjunctive deve rispettare le proprietà di Commutatività e di Associatività; quindi l'ordine secondo il quale viene effettuata la Revision non cambia il risultato dell'Updating complessivo.

La famiglia delle matrici di specializzazione che godono della proprietà di commutatività ed associatività e che contiene l'insieme delle specializzazioni condizionate dalle prove fornite, viene chiamata **Dempsterian Specialization Matrix**.

Quindi siano $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2 \in \mathcal{M}^\Omega$ e sia la matrice di specializzazione \mathbf{S}_m tale che $S_{m_2}(A, B) = m_2[B](A)$. Allora risulta

$$\mathbf{S}_m \text{ t.c. } S_{m_2}(A, B) = m_2[B](A) \quad S_{m_2} \cdot m_1 = m_2 \cap m_1$$

Poichè ciò che otteniamo dalla Conjunctive Combination Rule non è altro che la Dempster's Rule of Combination senza l'operazione di normalizzazione. Quindi possiamo giustificare le proprietà Commutativa ed Associativa della Conjunctive Combination Rule vedendo l'operazione di conditioning come una particolare forma di Conjunctive Combination Rule. Risultati analoghi si ottengono anche per la Disjunctive Combination Rule: basta sostituire la specializzazione con la generalizzazione ed il Conditioning con il Deconditioning.

Riportiamo un'esempio di **Dempsterian Specialization Matrix DsM** e la corrispettiva **Dempsterian Generalization Matrix DgM**.

$$\begin{array}{c}
 \mathbf{S} \\
 \left[\begin{array}{cccccccc}
 1 & .70 & .50 & .37 & .50 & .30 & .15 & .10 \\
 . & .30 & . & .13 & . & .20 & . & .05 \\
 . & . & .50 & .33 & . & . & .35 & .20 \\
 . & . & . & .17 & . & . & . & .15 \\
 . & . & . & . & .50 & .40 & .35 & .27 \\
 . & . & . & . & . & .10 & . & .08 \\
 . & . & . & . & . & . & .15 & .13 \\
 . & . & . & . & . & . & . & .02
 \end{array} \right]
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \mathbf{G} \\
 \left[\begin{array}{cccccccc}
 .10 & . & . & . & . & . & . & . \\
 .05 & .15 & . & . & . & . & . & . \\
 .20 & . & .30 & . & . & . & . & . \\
 .15 & .35 & .20 & .50 & . & . & . & . \\
 .27 & . & . & . & .37 & . & . & . \\
 .08 & .35 & . & . & .13 & .50 & . & . \\
 .13 & . & .40 & . & .33 & . & .70 & . \\
 .02 & .15 & .10 & .50 & .17 & .50 & .30 & 1
 \end{array} \right]
 \end{array}
 \quad (2.77)$$

2.5.6 Autovalori e Autovettori

Sia \mathbf{S}_m la **Dempsterian Specialization Matrix** prodotta da $\mathbf{m} \in \mathcal{M}^\Omega$. La matrice con Autovettori di \mathbf{S}_m è la **QfrM Matrix** (la quale non dipende da \mathbf{m}) e gli Autovalori di \mathbf{S}_m sono gli elementi della commonality

function q relativa ad m . I valori di q sono anche gli elementi della diagonale principale di \mathbf{S}_m . Questo risultato deriva dall'uguaglianza:

$$\mathbf{q}(\mathbf{A}) = \mathbf{m}\mathbf{A} \quad (2.78)$$

Questo spiega il motivo per cui la commonality function gioca un ruolo fondamentale quando le Conjunctive Combination Rules sono coinvolte. Riportiamo di seguito la decomposizione degli autovalori ed autovettori della matrice \mathbf{S} . **the Eigenvalues-eigenvectors Decomposition of \mathbf{S}**

$$\mathbf{S} = \mathbf{MfrQ} \cdot \begin{bmatrix} 1 & . & . & . & . & . & . & . \\ . & .30 & . & . & . & . & . & . \\ . & . & .50 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & .17 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & .50 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & .10 & . & . \\ . & . & . & . & . & . & .15 & . \\ . & . & . & . & . & . & . & .02 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{QfrM} \quad (2.79)$$

Riportiamo la decomposizione degli autovalori e degli autovettori della matrice \mathbf{G} . **the Eigenvalues-eigenvectors Decomposition of \mathbf{G}**

$$\mathbf{G} = \mathbf{MfrB} \cdot \begin{bmatrix} 0.10 & . & . & . & . & . & . & . \\ . & .15 & . & . & . & . & . & . \\ . & . & .30 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & .50 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & .37 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & .50 & . & . \\ . & . & . & . & . & . & .70 & . \\ . & . & . & . & . & . & . & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{BfrM} \quad (2.80)$$

Quindi la rappresentazione matriciale della **Conjunctive Combination Rule** diventa:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_1 \cap \mathbf{q}_2 &= \mathbf{QfrM} \cdot \mathbf{m}_1 \cap \mathbf{m}_2 \\ &= \mathbf{QfrM} \cdot \mathbf{S}_{m_1} \cdot \mathbf{m}_2 \\ &= \mathbf{QfrM} \cdot \mathbf{MfrQ} \cdot \mathbf{Diag}(\mathbf{q}_1) \cdot \mathbf{QfrM} \cdot \mathbf{m}_2 \\ &= \mathbf{Diag}(\mathbf{q}_1) \cdot \mathbf{q}_2 \end{aligned} \quad (2.81)$$

Lo stesso caso vale per la **Dempesterian Generalization Matrix** generata da $\mathbf{m} \in \mathcal{M}^\Omega$. La matrice con gli autovettori di \mathbf{G}_m è la **BfrM** Matrix e gli autovalori di \mathbf{G}_m sono gli elementi delle Implicability functions relativi ad m . I valori di \mathbf{b} sono gli elementi della diagonale principale di \mathbf{G}_m . Questo spiega l'importanza della implicability functions \mathbf{b} relative ad \mathbf{m} , quando si considera una Disjunctive Combination Rule.

Quindi la rappresentazione matriciale della **Disjunctive Combination Rule** diventa:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_1 \cup \mathbf{b}_2 &= \mathbf{BfrM} \cdot \mathbf{m}_1 \cup \mathbf{m}_2 \\ &= \mathbf{BfrM} \cdot \mathbf{G}_m \cdot \mathbf{m}_2 \\ &= \mathbf{BfrM} \cdot \mathbf{MfrB} \cdot \mathbf{Diag}(\mathbf{b}_1) \cdot \mathbf{BfrM} \cdot \mathbf{m}_2 \\ &= \mathbf{Diag}(\mathbf{b}_1) \cdot \mathbf{b}_2 \end{aligned} \quad (2.82)$$

Capitolo 3

Unified Combination Rule Parameter Design and Simulation Results

When one admits that nothing is certain one must, I think, also add that some things are more nearly certain than others.

- Bertrand Russel.

It is not certain that everything is uncertain.

- Blaise Pascal.

3.1 Unified Comb-Rule's k-parameter design

Spesso nella progettazione di un sistema di controllo basato su regole, risulta essenziale tradurre le proprie specifiche in funzione di uno o più parametri in modo tale da individuare la miglior strategia da attuare sul processo.

In particolare se la nostra azione di controllo sono governate dalla combinazione di due o più sorgenti, risulta fondamentale stabilire come fondere le bba structure che le caratterizzano. Se tale combinazione è basata sulla Consistenza delle Prove Comuni, allora la nostra scelta è orientata su una serie di And Logici che caratterizzano la **Conjunctive Combination Rule**. Il risultato di questa operazione da luogo al vettore delle **masse non normalizzate**; A partire da questo vettore, al fine di poter raggiungere il comportamento desiderato, viene effettuata la scelta della Regola migliore per l'applicazione.

Il mondo che racchiude tutte queste regole è descritto dal modello Parametrico di Inagaki. Tuttavia tale modello dipende dalla scelta di un parametro \mathbf{k} , il cui valore dipende dall'entità del conflitto presente tra le sorgenti e anche dal grado di Ignoranza Comune. Risulta quindi lecito domandarsi come sia possibile stabilire il **Range dei valori ammissibili** per tale parametro. se non abbiamo ancora a disposizione le istanze del problema. (E quindi i corrispondenti valori di $\mathbf{m}_{12}(\emptyset)$ e $\mathbf{m}_{12}(\mathbf{X})$).

Come abbiamo visto, una possibilità è quella di definire una Regola ben precisa che consenta di ridistribuire il conflitto tra gli insiemi del Power Set. Tuttavia, tale scelta limita molto la possibilità di sfruttare a pieno

l'unico grado di libertà della Unified Combination Rule, in quanto possiamo selezionare un numero finito di regole tra le possibili infinite regole ottenute da tutte le *ammissibili Ridistribuzioni* di $\mathbf{m}_{12}(\emptyset)$ tra gli insiemi del Power Set. (D'ora in avanti per semplicità di notazione, salvo esplicita annotazione, ometteremo il pedice per indicare che si tratta della massa risultante dalla fusione di due sorgenti). Quindi il problema che ci poniamo è il seguente:

1. **E' possibile definire implicitamente i valori ammissibili del parametro k senza conoscere il vettore delle masse non normalizzate?**
2. **Inoltre tale scelta come si traduce nella corrispondente Regola che filtra il conflitto tra i focal elements del Power Set?**

Per rispondere a queste due domande ripercorriamo nuovamente la strada seguita da Inagaki nel definire le relazioni della **Unified Combination Rule** con uno spirito più analitico.

3.1.1 Ripartizione percentuale della massa del Null Sets

Abbiamo più volte evidenziato che il punto di partenza del modello di Inagaki è basato sulla seguente proporzione:

$$\frac{\mathbf{m}(\mathbf{C})}{\mathbf{m}(\mathbf{D})} = \frac{\mathbf{m}_{\mathbf{N}}(\mathbf{C})}{\mathbf{m}_{\mathbf{N}}(\mathbf{D})} \quad \forall \mathbf{C}, \mathbf{D} \neq \emptyset \quad (3.1)$$

Il quale in sostanza evidenzia il fatto che il rapporto tra le masse degli insiemi del Power Set, prima dell'operazione di Normalizzazione e dopo di essa rimane costante. A partire da tale osservazione, ha detto che sulla base della scelta della **scaling function** si ridistribuisce la massa dell'insieme vuoto agli insiemi del Power Set. Per avere un'idea di quanto detto, riprendiamo l'esempio del capitolo 2, dove il vettore delle masse non normalizzate era:

$$\mathbf{m}_{12} = \begin{bmatrix} 0.350 \\ 0.500 \\ 0.150 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m(\emptyset) \\ m(A) \\ m(B) \\ m(AB) \end{bmatrix}$$

Idealmente possiamo individuare tutte le possibili ridistribuzioni della massa del Null Set dalle seguenti Relazioni:

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_{\mathbf{N}}(\mathbf{A}) &= \overbrace{m(A)}^{0.500} + \overbrace{\mathbf{f}(\mathbf{A})}^{?} \cdot \overbrace{m(\emptyset)}^{0.350} \\ \mathbf{m}_{\mathbf{N}}(\mathbf{B}) &= \overbrace{m(B)}^{0.150} + \overbrace{\mathbf{f}(\mathbf{B})}^{?} \cdot \overbrace{m(\emptyset)}^{0.350} \\ \mathbf{m}_{\mathbf{N}}(\mathbf{AB}) &= \overbrace{m(A)}^0 + \overbrace{\mathbf{f}(\mathbf{AB})}^{?} \cdot \overbrace{m(\emptyset)}^{0.350} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Tra tutte queste ridistribuzioni abbiamo individuato **3** Regole principali, che hanno la seguente interpretazione in funzione del parametro k :

$\mathbf{k} = \mathbf{0}$ (**Yager's Rule**): Ciò significa che assegno tutto all'insieme Universale, pertanto la redistribuzione avviene nella seguente maniera:

$$\begin{array}{ccc}
 & \text{(0.350)} & \\
 & \overbrace{\{\emptyset\}} & \\
 \swarrow & \downarrow & \searrow \\
 \underbrace{0\% = \mathbf{0}}_{\{A\}} & \underbrace{0\% = \mathbf{0}}_{\{B\}} & \underbrace{100\% = \mathbf{0.350}}_{\{AB\}}
 \end{array} \tag{3.3}$$

Quindi le **masse finali** sono:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{f}(\mathbf{A}) = \mathbf{0} & \rightarrow \mathbf{m}_N(\mathbf{A}) = \overbrace{m(A)}^{0.500} + \mathbf{0} \cdot \overbrace{m(\emptyset)} = 0.500 \\
 \mathbf{f}(\mathbf{B}) = \mathbf{0} & \rightarrow \mathbf{m}_N(\mathbf{B}) = \overbrace{m(B)}^{0.150} + \mathbf{0} \cdot \overbrace{m(\emptyset)} = 0.150 \\
 \mathbf{f}(\mathbf{AB}) = \mathbf{1} & \rightarrow \mathbf{m}_N(\mathbf{AB}) = \overbrace{m(AB)}^0 + \mathbf{1} \cdot \overbrace{m(\emptyset)}^{0.350} = 0.350
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

In particolare osserviamo che in questo caso Non Normalizziamo.

$\mathbf{k} = \frac{1}{1-m(\emptyset)}$ **Dempster's Rule**: Questa redistribuisce la massa in modo proporzionale alle masse non normalizzate degli insiemi del Power Set. Nel nostro caso si ha:

$$\begin{array}{ccc}
 & \text{(0.650)} & \\
 & \overbrace{m\{A\} + m\{B\} + m\{AB\}} & \\
 \swarrow & \downarrow & \searrow \\
 \underbrace{77\%}_{m\{A\} = 0.500} & \underbrace{23\%}_{m\{B\} = 0.150} & \underbrace{0\%}_{m\{AB\} = 0}
 \end{array} \tag{3.5}$$

Quindi la massa del Null Set viene redistribuita nella seguente maniera:

$$\begin{array}{ccc}
 & \text{(0.350)} & \\
 & \overbrace{\{\emptyset\}} & \\
 \swarrow & \downarrow & \searrow \\
 \underbrace{77\% = \mathbf{0.269}}_{\{A\}} & \underbrace{23\% = \mathbf{0.081}}_{\{B\}} & \underbrace{0\% = \mathbf{0}}_{\{AB\}}
 \end{array} \tag{3.6}$$

Quindi le **masse Normalizzate** sono:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{f}(\mathbf{A}) = \mathbf{0.77} & \rightarrow \mathbf{m}_N(\mathbf{A}) = \overbrace{m(A)}^{0.500} + \overbrace{\mathbf{0.77} \cdot m(\emptyset)}^{0.269} = 0.769 \\
 \mathbf{f}(\mathbf{B}) = \mathbf{0.23} & \rightarrow \mathbf{m}_N(\mathbf{B}) = \overbrace{m(B)}^{0.150} + \overbrace{\mathbf{0.23} \cdot m(\emptyset)}^{0.081} = 0.231 \\
 \mathbf{f}(\mathbf{AB}) = \mathbf{0} & \rightarrow \mathbf{m}_N(\mathbf{AB}) = \overbrace{m(AB)}^0 + \overbrace{\mathbf{0} \cdot m(\emptyset)}^0 = 0
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

$\mathbf{k} = \frac{1}{1-m(\emptyset)-m(\mathbf{X})}$ **Inagaki's Extra Rule**: In questo caso la redistribuzione della massa del Null set viene assegnata solo agli insiemi diversi da quello universale, che nel nostro esempio coincide con quella di Dempster poiché gli unici due focal elements sono l'insieme A e l'insieme B.

A questo punto ci si domanda se sia possibile passare da una regola all'altra senza fornire esplicitamente il valore di k ; il quale ad eccezione di $k=0$, non ha una facile interpretazione. Ed inoltre risulta poco immediato individuare una specifica regola e la semantica che racchiude il suo valore numerico.

Riprendiamo l'esempio Numerico riportato da Inagaki nel suo articolo e consideriamo le due situazioni in cui si ha poco e molto conflitto tra le sorgenti del sistema.

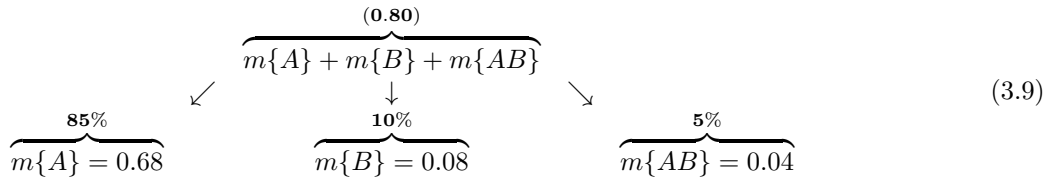
Less Conflict:

$$\mathbf{m}_1 \oplus \mathbf{m}_2 = \begin{bmatrix} 0.20 \\ 0.68 \\ 0.08 \\ 0.04 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m(\emptyset) \\ m(A) \\ m(B) \\ m(AB) \end{bmatrix}$$

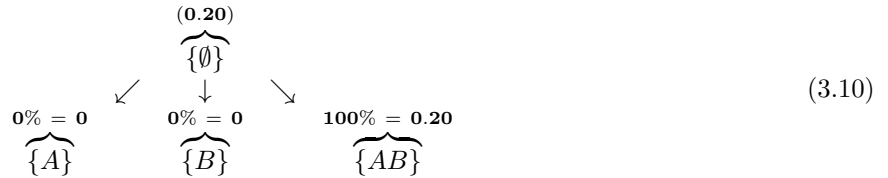
Risulta chiaro che in questa situazione la massa del Null Set da redistribuire tra gli insiemi del Power Set è esigua, per cui abbiamo un range di valori più limitato per il parametro che individua una specifica Comb-Rule. In particolare la redistribuzione di tale massa tra gli insiemi del Power Set è individuata dalle seguenti relazioni che caratterizzano la **Unified CombinationRule**:

$$\begin{aligned} \mathbf{m}(A) &= (1 + 0.2k) \cdot 0.68 = 0.68 + \mathbf{0.136} \cdot k \\ \mathbf{m}(B) &= (1 + 0.2k) \cdot 0.08 = 0.08 + \mathbf{0.016} \cdot k \\ \mathbf{m}(AB) &= (1 + 0.2k) \cdot 0.04 + (1 - \mathbf{0.8} \cdot k) \cdot 0.20 \end{aligned} \tag{3.8}$$

In particolare osserviamo che la massa complessiva dei focal elemnts differenti dal Null Set è:



Quindi a prima vista possiamo dire che la prova più evidente è **A** seguita da **B** ed in fine abbiamo un pò di Incertezza legata ad **AB** che è l'insieme Universale. Analogamente a prima possiamo individuare implicitamente i valori di k a partire dalle rispettive percentuali di redistribuzione del Null set ai sottoinsiemi del Power Set:



Quindi risulta che le masse finali sono:

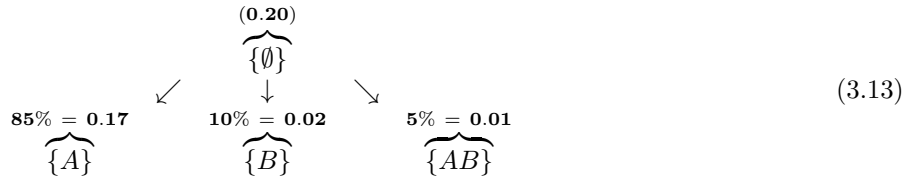
$$\begin{aligned} \mathbf{f}(A) = 0 &\rightarrow \mathbf{m}_N(A) = \overbrace{m(A)}^{0.68} + \overbrace{0 \cdot m(\emptyset)}^0 = 0.68 \\ \mathbf{f}(B) = 0 &\rightarrow \mathbf{m}_N(B) = \overbrace{m(B)}^{0.08} + \overbrace{0.23 \cdot m(\emptyset)}^0 = 0.08 \\ \mathbf{f}(AB) = 1 &\rightarrow \mathbf{m}_N(AB) = \overbrace{m(AB)}^{0.04} + \overbrace{1 \cdot m(\emptyset)}^{0.20} = 0.24 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Questa distribuzione percentuale si traduce nella regola di **Yager** che si ottiene in corrispondenza di $\mathbf{k}=\mathbf{0}$. In questo caso non abbiamo normalizzato e abbiamo tradotto completamente il conflitto in ignoranza che si va ad aggiungere a quella già esistente. Infatti:

$\mathbf{k}=\mathbf{0}$

$$\begin{aligned} \mathbf{m}(\mathbf{A}) &= 0.68 + \mathbf{0.136} \cdot \mathbf{k} = 0.68 \\ \mathbf{m}(\mathbf{B}) &= 0.08 + \mathbf{0.016} \cdot \mathbf{k} = 0.08 \\ \mathbf{m}(\mathbf{AB}) &= (1 + \mathbf{0.2k}) \cdot 0.04 + (1 - \mathbf{0.8} \cdot \mathbf{k}) \cdot 0.20 = 0.24 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Dempster: Se invece preferiamo ridistribuire in modo proporzionale alle prove consistenti ottenute dalla fusione delle sorgenti, abbiamo:



Pertanto risulta che le **masse normalizzate** sono:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{A}) = \mathbf{0.85} &\quad \rightarrow \quad \mathbf{m}_N(\mathbf{A}) = \overbrace{m(A)}^{0.68} + \overbrace{85\% \cdot m(\emptyset)}^{0.17} = 0.85 \\ \mathbf{f}(\mathbf{B}) = \mathbf{0.10} &\quad \rightarrow \quad \mathbf{m}_N(\mathbf{B}) = \overbrace{m(B)}^{0.08} + \overbrace{10\% \cdot m(\emptyset)}^{0.02} = 0.10 \\ \mathbf{f}(\mathbf{AB}) = \mathbf{0.05} &\quad \rightarrow \quad \mathbf{m}_N(\mathbf{AB}) = \overbrace{m(AB)}^{0.04} + \overbrace{5\% \cdot m(\emptyset)}^{0.01} = 0.05 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Questa distribuzione percentuale '**Baricentrale**' nel reticolo si traduce nella regola di Dempster che si ottiene in corrispondenza del seguente valore di \mathbf{k} :

$$\mathbf{k} = \frac{1}{1 - \mathbf{m}(\emptyset)} = \mathbf{1.25} :$$

$$\begin{aligned} \mathbf{m}(\mathbf{A}) &= 0.68 + \overbrace{\mathbf{0.136} \cdot \mathbf{1.25}}^{\mathbf{0.17} = \mathbf{85\%} \mathbf{m}(\emptyset)} = 0.85 \\ \mathbf{m}(\mathbf{B}) &= 0.08 + \overbrace{\mathbf{0.016} \cdot \mathbf{1.25}}^{\mathbf{0.02} = \mathbf{10\%} \mathbf{m}(\emptyset)} = 0.10 \\ \mathbf{m}(\mathbf{AB}) &= (1 + \mathbf{0.2} \cdot \mathbf{k}) \cdot 0.04 + (1 - \mathbf{0.8} \cdot \mathbf{k}) \cdot 0.20 \\ &= 0.04 + \overbrace{(\mathbf{0.2})(\mathbf{1.25})(\mathbf{0.04})}^{\mathbf{0.01} = \mathbf{5\%} \mathbf{m}(\emptyset)} + \overbrace{1 - \mathbf{0.8} \cdot (\mathbf{1.25})}^{\mathbf{0\%}} = 0.05 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Inagaki's Extra Rule: In fine se desideriamo non rimandare la nostra sdecisione escludiamo dalla ridistribuzione della massa del Null Set, l'insieme Universale. Pertanto avremo **un'ulteriore ripartizione del 5%** tra gli altri sottoinsiemi del Power Set in modo proporzionale alle loro masse. Ovvero risulta:

$$\begin{array}{ccc}
 & \overbrace{\mathbf{m(A) + m(B)}}^{(0.76)} & \\
 & \swarrow \quad \searrow & \\
 \overbrace{m(A) = 0.68}^{89\%} & & \overbrace{m(B) = 0.08}^{11\%}
 \end{array} \tag{3.16}$$

Quindi l'ulteriore 5% del Null set che spettava all'insieme Universale viene ridistribuito tra gli altri due sottoinsiemi nella seguente maniera:

$$\begin{array}{ccc}
 & \overbrace{\mathbf{X = \{AB\}}}^{5\%} & \\
 & \swarrow \quad \searrow & \\
 \overbrace{\{A\}}^{(89-85)=4\%} & & \overbrace{\{B\}}^{(11-10)=1\%}
 \end{array} \tag{3.17}$$

Quindi in definitiva abbiamo:

$$\begin{array}{ccc}
 & \overbrace{\{\emptyset\}}^{(0.20)} & \\
 & \swarrow \quad \downarrow \quad \searrow & \\
 \overbrace{\{A\}}^{89\% = 0.178} & \overbrace{\{B\}}^{11\% = 0.22} & \overbrace{\{AB\}}^{0\% = 0}
 \end{array} \tag{3.18}$$

Questa distribuzione percentuale si traduce nella **Inagaki's Extra Rule** che si ottiene in corrispondenza del seguente valore di $\mathbf{k} = \frac{1}{1 - m(\emptyset) - m(\mathbf{X})} = \mathbf{1.316}$:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{m(A)} &= 0.68 + \overbrace{0.136 \cdot 1.316}^{0.178 = 89\% m(\emptyset)} = 0.858 \\
 \mathbf{m(B)} &= 0.08 + \overbrace{0.016 \cdot 1.316}^{0.022 = 11\% m(\emptyset)} = 0.102 \\
 \mathbf{m(AB)} &= (1 + 0.2 \cdot \mathbf{k}) \cdot 0.04 + (1 - 0.8 \cdot \mathbf{k}) \cdot 0.20 \\
 &= 0.04 + \overbrace{(0.2)(1.316)(0.04)}^{0.01 = 5\% m(\emptyset)} + \overbrace{(1 - 0.8 \cdot 1.316)(0.20)}^{0.01 = -5\% m(\emptyset)} = 0.04
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

NB:A questo punto è lecito domandarsi se sia possibile scegliere arbitrariamente le Percentuali da assegnare ai rispettivi insiemi del Power Set e tradurli nei rispettivi valori di k. **La Risposta è No!**

Infatti, come è stato più volte sottolineato, il punto di partenza del modello di Inagaki è legata dalla seguente proporzione (che in qualche modo evidenzia il significato intrinseco del titolo dell'opera di Shafer: 'A mathematical theory of evidence'. Ovvero un trattato matematico sulle prove dei fatti):

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Non Normalizzate} & & \text{Normalizzate} \\
 \frac{\overbrace{m(A)}}{\overbrace{m(B)}} & \xrightarrow[\equiv]{\text{prima} \rightarrow \text{dopo}} & \frac{\overbrace{m_N(A)}}{\overbrace{m_N(B)}} \\
 \mathbf{m_N(A)} & = & m(A) + f(A) \cdot m(\emptyset) \\
 \mathbf{m_N(B)} & = & m(B) + f(B) \cdot m(\emptyset) \quad A, B \in X.
 \end{array} \tag{3.20}$$

Prima: Vediamo cosa significa questa relazione da un punto di vista numerico.

$$\frac{\mathbf{m(A)}}{\mathbf{m(B)}} = \frac{0.68}{0.08} = \mathbf{8.5} \tag{3.21}$$

Ciò significa che la $\mathbf{bba(A)}$ è **8.5** volte **più grande** della $\mathbf{bba(B)}$. Ovvero:

$$m(A) = \mathbf{8.5} \cdot m(B)$$

Ovviamente questi rapporti li devo verificare a coppie tra tutti gli insiemi del Power Set che risultino differenti dall'insieme vuoto e dall'insieme universale. Inoltre dato che c'è un legame direttamente proporzionale tra un'insieme ed un'altro risulta chiaro che posso esprimere tutto in funzione di un'unica massa scelta come riferimento. (Ad esempio la più grande fra tutti i focal elements del Power Set). Quindi ora si comprende perchè il modello sviluppato da Inagaki è caratterizzato da un singolo grado di libertà.

Dopo: Supponiamo ora di assegnare una certa percentuale della massa del Null set ad uno degli insiemi del Power Set. Ad esempio si consideri l'insieme \mathbf{B} :

$$\mathbf{m_N(B)} = m(B) + \mathbf{f(B)} \cdot m(\emptyset).$$

Si consideri ad esempio di assegnare il 10%, quindi $\mathbf{f(B)} = \mathbf{10\%}$:

$$\mathbf{m_N(B)} = 0.08 + \mathbf{10\%} \cdot 0.20 = 0.10$$

A questo punto ci si domanda quanto sia la percentuale da attribuire ad A ? $\rightarrow \mathbf{f(A)}=?$

Dato che:

$$m(A) = \mathbf{8.5} \cdot m(B).$$

Allora:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{m_N(A)} &= \mathbf{8.5} \cdot m_N(B) \\
 &= \mathbf{8.5} \cdot (0.10) = 0.85.
 \end{aligned}$$

Pertanto:

$$\begin{aligned}
m_N(A) &= m(A) + \mathbf{f}(\mathbf{A}) \cdot m(\emptyset) \\
0.85 &= 0.68 + \mathbf{f}(\mathbf{A}) \cdot 0.20 \\
\mathbf{f}(\mathbf{A}) &= \frac{0.17}{0.20} = \mathbf{85\%}.
\end{aligned}$$

Che effettivamente è la percentuale corrispondente per la regola di Dempster. Quindi se la massa $\mathbf{m}(\mathbf{A})$ è **8.5** volte più grande di $\mathbf{m}(\mathbf{B})$, allora se stabilisco una percentuale di $m(\emptyset)$, è automaticamente determinata quella da attribuire a $m(A)$ poichè $\mathbf{m}_N(\mathbf{A})$ è **8.5** volte $\mathbf{m}_N(\mathbf{B})$.

In altre parole → Scelta una percentuale, tutte le altre sono automaticamente determinate. Ecco quindi il motivo per cui abbiamo un solo grado di libertà nel nostro sistema.

NB: Tuttavia occorre fare attenzione! Infatti questo unico grado di libertà è caratterizzato da un **Vincolo**, che determina una **Ridistribuzione Percentuale Ammissibile**. Quindi occorre stabilire fino a quanto posso far salire la Grandezza percentuale di uno degli insiemi.

Dagli esempi precedenti abbiamo visto che il **massimo valore percentuale** si ottiene in corrispondenza della **Inagaki's Extra Rule**, in cui ho filtrato completamente la massa del Null Set $\mathbf{m}(\emptyset)$ tra i focal elements differenti dall'insieme Universale. Ora ci si domanda che cosa possa accadere **se sfioriamo l'Upper Bound ?**:

Ad esempio, se invece di attribuire l'11% di $\mathbf{m}(\emptyset)$ a \mathbf{B} , gli attribuiamo il 12% che cosa accade ?

$$\mathbf{m}_N(\mathbf{B}) = 0.08 + 12\% \cdot 0.20 = 0.104$$

Ora in base a quanto detto da Inagaki si ha:

$$m_N(A) = \mathbf{8.5}m_N(B)$$

Quindi:

$$m_N(A) = \mathbf{8.5} \cdot 0.104 = 0.884$$

Calcoliamo ora la percentuale da attribuire ad A:

$$0.884 = 0.68 + \mathbf{f}(\mathbf{A})0.20$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{A}) = 1.02 \rightarrow 102\% m(\emptyset) \rightarrow \textit{Assurdo!}$$

Pertanto nell'operazione di Normalizzazione delle masse occorre fare attenzione a due fatti:

1. Il valore percentuale delle masse di $m(\emptyset)$ che posso assegnare, dipende dalle prove consistenti del sistema frutto della combinazione delle sorgenti del sistema. (Pertanto non posso attribuire arbitrariamente le percentuali del Null set agli insiemi una volta fissata una di uno specifico insieme). Questo vincolo è legato alla proporzione esistente tra le masse non normalizzate e quelle Normalizzate che deve rimanere costante. Se ciò non si verifica, significa che ho assegnato in modo non coerente alla proporzione, la quale riflette la rapidità della variazione percentuale delle masse del sistema al variare di k (il coefficiente angolare delle rette in funzione del parametro k).

2. Oltre al vincolo precedednte occorre fare attenzione a rispettare il valore percentuale massimo che può raggiungere una dato insieme nel contesto applicativo. Il quale dipende dall'entità della massa dell'Insieme universale, ma soprattutto dalla massa del conflitto. Infatti se scelgo un valore troppo grande questo si traduce in una redistribuzione della quantità di $m(\emptyset)$ maggiore rispetto a quella disponibile, portando quindi a dei valori negativi della massa dell'insieme universale che ha finito di redistribuire completamente la percentuale che gli spettava. Infatti, oltre il valore di \mathbf{k}_I gli altri insiemi del power set continuano a prelevare massa dall'insieme universale (se ovviamente esiste dell'incertezza comune tra le sorgenti del sistema). In realtà potremmo interpretare questa operazione come un'ulteriore filtraggio dell'incertezza a favore degli altri focal elements del Power Set (E quindi idealmente stabilire un'ulteriore Upper Bound, al quale però occorre dare una certa interpretazione all'interno dell'applicazione). Una volta esaurito il serbatoio dell'insieme Universale, la sua massa inizia ad assumere valori negativi, violando ovviamente il vincolo che le bba del sistema risultino positive. Va comunque sottolineato che sebbene assuma valori negativi la somma complessiva delle masse rimane unitaria, ma questo è solo un dettaglio semplicemente legato all'operazione di normalizzazione.

Abbiamo quindi compreso l'idea di fondo del Closed World, la quale inizialmente poteva essere un pò oscura, ma che in realtà si basa sul fatto che le nostre valutazioni si basano sulla totale ignoranza dell'affidabilità delle sorgenti del sistema e quindi i valori percentuali delle masse normalizzate non possono essere cambiati in modo del tutto arbitrario in quanto significa che abbiamo condizionato una scelta sulla base delle convinzioni personali che una data sorgente non sia attendibile, stravolgendo così la costanza della proporzione stabilita da Inagaki. Inoltre non possiamo sconfinare dal Power Set attribuendo in modo indefinito il valore percentuale della massa dell'insieme vuoto da redistribuire agli insiemi del power set.

3.1.2 α -Tuning parameter mapping

Compresa la dinamica secondo la quale si redistribuisce la massa del Null Set, occorre trovare un **metodo** che ci consenta di tradurre numericamente le **specifiche di filtraggio**, in modo tale da non dipendere dallo specifico valore di k . Infatti tale valore cambia a seconda dell'istanza del problema, mentre noi vorremmo trovare un modo che ci consenta di individuare una determinata regola a partire da uno specifico valore numerico che risulti indipendente dal problema. La soluzione personalmente adottata è la seguente:

$$\mathbf{k} = \mathbf{f}(\alpha) : \begin{cases} \frac{1}{1 - m(\emptyset) + \alpha \cdot m(X)} & \alpha \in [-1 \ 0] \\ \frac{1 - \alpha}{\sum_C m(C)} = (1 - \alpha) \cdot \mathbf{k}_D & \alpha \in [0 \ 1] \end{cases} \quad (3.22)$$

Dal modello parametrico che ho definito posso implicitamente comprendere tutti i valori ammissibili del parametro k . In particolare osserviamo che per $\alpha = 1$ otteniamo la regola di **Yager**:

$$\alpha = 1 \rightarrow \mathbf{k}_Y = \frac{\overbrace{(1 - \alpha)}}{\sum_C m(C)} = 0. \quad (3.23)$$

In corrispondenza di $\alpha = \mathbf{0}$ si ottiene la Regola di **Dempster**:

$$\begin{aligned} \alpha = \mathbf{0} &\rightarrow \mathbf{k}_D = (1 - \alpha) \cdot \mathbf{k}_D \\ \alpha = \mathbf{0} &\rightarrow \mathbf{k}_D = \frac{1}{1 - m(\emptyset) + \alpha \cdot m(X)} = \mathbf{k}_D \end{aligned} \quad (3.24)$$

Cerchiamo ora di comprendere i passaggi che ci hanno condotto a definire queste relazioni ed il significato dell'operazione di interpolazione ed estrapolazione della regola di Dempster. Partiamo dalla seguente relazione:

$$\alpha \in [-1 \ 0] \rightarrow \frac{1}{1 - m(\emptyset) + \alpha \cdot m(X)}. \quad (3.25)$$

Il denominatore ha un significato ben preciso. Infatti osserviamo che esso dipende dal parametro α , il quale può variare tra zero e -1. In particolare, per $\alpha = 0$ otteniamo la regola di Dempster. Ovviamente tale valore non è frutto di un'artificio ad hoc per ottenere la corrispondente regola, ma è possibile attribuirgli un significato specifico. Infatti possiamo interpretare tale valore come un coefficiente che attribuisce o meno una penalità all'insieme universale nella redistribuzione della massa del Null Set. Quindi per $\alpha = \mathbf{0}$ il conflitto viene redistribuito in modo proporzionale alla sua massa non normalizzata, senza penalizzare nessun focal element del body of evidence. Pertanto se nel sistema il grado di ignoranza tra le diverse sorgenti è massimo, allora la corrispondente fusione darà luogo ad una bba structure che sarà caratterizzata da un gran livello di incertezza legato alla massa dell'Universal Set. Risulta evidente che la situazione estrema si ottiene con la *Vacuous Belief structure* che modella la totale ignoranza e che in sostanza si traduce in una plausibilità massima pari all'unità ed una belief minima pari a zero per tutte le ipotesi del Power Set.

Successivamente se facciamo variare $\alpha \in [0 \ -1]$ otteniamo l'insieme delle regole che estrapolano quella di Dempster, fino ad arrivare alla situazione estrema della **Inagaki's Extra Rule**. In particolare se ci posizioniamo in corrispondenza del punto medio individuato dal valore di $\mathbf{k}_{DI} = \frac{\mathbf{k}_D + \mathbf{k}_I}{2}$ (Sempre nell'ipotesi che $k_D \neq k_I$, ovvero ci poniamo nella situazione in cui è presente dell'incertezza comune tra le sorgenti del sistema), allora α assume il valore $\alpha = \frac{1}{2}$. Anche questo valore ha un particolare significato. Infatti, in corrispondenza di questo punto stiamo filtrando metà della percentuale assegnata all'insieme Universale nella caso della regola di Dempster agli altri focal elements del Power Set. In sostanza stiamo dicendo che se esiste dell'incertezza tra le varie sorgenti del sistema, allora l'eventuale percentuale di conflitto non si traduce in modo proporzionale al grado di Ignoranza del sistema ma si decide di affidare una parte di esso (in questo caso la metà) al body of evidence del Power Set.

Ovviamente, la situazione estrema si ottiene in corrispondenza della **Inagaki's Extra Rule**, in cui si elimina ogni possibilità di dubbio o più precisamente filtriamo il conflitto in modo tale che venga redistribuito totalmente a favore delle altre ipotesi del Power Set a discapito dell'incertezza rappresentata dall'insieme universale. Quindi in sostanza non lascio spazio alla possibilità di aumentare lo stato di ignoranza del sistema; Questa decisione spesso può essere presa quando la massa dell'insieme universale diventa troppo consistente al punto tale da non poter prendere una decisione. Pertanto occorre in un certo senso perturbare tale bba structure cercando di avvicinarci alle altre ipotesi più probabili presenti nel Power Set.

Per avere un'idea diretta riprendiamo il solito esempio dell'articolo di Inagaki a partire dalla Extra Rule fino ad arrivare ad una situazione intermedia tra Dempster ed Inagaki.

$$\alpha = -\mathbf{1} \quad \rightarrow \quad \mathbf{k}_I = \frac{1}{1 - m(\emptyset) - m(X)} \quad (3.26)$$

Risulta chiaro che possiamo esprimere il denominatore in funzione delle masse rispetto alle quali effettuiamo l'operazione di normalizzazione. Ovvero:

$$1 - m(\emptyset) - m(X) = \mathbf{m}(\mathbf{A}) + \mathbf{m}(\mathbf{B})$$

Osserviamo che abbiamo escluso l'insieme universale, la cui redistribuzione è stata già analizzata precedentemente. Ora verifichiamo la validità della formula nel caso $\alpha = -\frac{1}{2}$:

$$\alpha = -\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \mathbf{k}_{DI} = \frac{1}{1 - m(\emptyset) - \frac{1}{2}m(X)} \quad (3.27)$$

In questo caso stiamo normalizzando rispetto al seguente denominatore:

$$\begin{array}{ccc} & \overbrace{\mathbf{m}(\mathbf{A}) + \mathbf{m}(\mathbf{B}) + 0.5\mathbf{m}(\mathbf{AB})}^{(0.78)} & \\ & \downarrow & \\ \swarrow & & \searrow \\ \underbrace{m(A) = 0.68}_{87.18\%} & & \underbrace{m(B) = 0.08}_{10.26\%} \quad \underbrace{m(AB) = 0.02}_{2.56\%} \end{array} \quad (3.28)$$

Quindi abbiamo che le masse normalizzate risultano pari ad:

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_N(\mathbf{A}) &= \overbrace{m(A)}^{0.68} + \overbrace{87\% \cdot m(\emptyset)}^{0.17436} = 0.85436 \\ \mathbf{m}_N(\mathbf{B}) &= \overbrace{m(B)}^{0.08} + \overbrace{10.26\% \cdot m(\emptyset)}^{0.02052} = 0.10052 \\ \mathbf{m}_N(\mathbf{X}) &= \overbrace{m(X)}^{0.04} + \overbrace{2.56\% \cdot m(\emptyset)}^{0.00512} = 0.04512 \end{aligned} \quad (3.29)$$

Risulta chiaro che è verificata la somma unitaria delle masse:

$$\sum m_i = 0.85436 + 0.10052 + 0.04512 = 1$$

Calcoliamo ora il valore \mathbf{k}_{DI} adottando il valore \mathbf{k}_I :

$$\mathbf{k}_{DI} = \frac{k_D + k_I}{2} = \frac{1.316 + 1.25}{2} = 1.283$$

Tale formula presuppone il calcolo delle due costanti. Ora utilizziamo l'altra formula:

$$k = \frac{1}{1 - 0.20 - 0.50 \cdot (0.04)} = 1.283$$

A questo punto visto che è possibile calcolare tale valore semplicemente facendo la media dei due valori può nascere la domanda sulla ragione di usare una formula piuttosto che un'altra. La ragione è legata innanzitutto all'interpretazione diretta sull'operazione di normalizzazione e l'alto motivo è legato ad un problema numerico. Infatti, supponendo di aver calcolato le due costanti che coinvolgono due operazioni di divisione questo può portare a degli arrotondamenti che possono dar luogo a dei valori leggermente differenti se l'applicazione richiede una grande precisione nei risultati. Soprattutto se abbiamo che i valori sono racchiusi in un'intervallo così piccolo come il segmento unitario, una cifra decimale in più o in meno fa la differenza! Inoltre in generale è sempre desiderabile esprimere le formule sempre in funzione dei dati in ingresso che in questo caso sono le masse non normalizzate. Ovviamente una possibile soluzione potrebbe essere quella di esprimere alcuni punti notevoli in modo esplicito rispetto alle masse del parametro k , tuttavia tale operazione oltre a limitare la nostra scelta dove posizionarci, comporta molti più calcoli rispetto alla formula che ho adottato. Infatti andando a sostituire l'espressione analitica dei due parametri si ottiene la seguente espressione analitica:

$$\frac{\mathbf{k}_D + \mathbf{k}_I}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot (1 - m(\emptyset)) - m(X)}{(1 - m(\emptyset) - m(X)) \cdot (1 - m(\emptyset))} \quad (3.30)$$

Oltre a richiedere una mole di calcoli maggiori, è anche di più difficile interpretazione. L'importanza di formulare un'equazione che richieda poche operazioni è logica, ma risulta altrettanto importante utilizzare delle formule che risultino semplici ad allo stesso tempo che abbiano un riscontro oggettivo sul significato esplicito per l'applicazione. Infatti in tale modo sono chiare anche a coloro che devono utilizzare il codice in fase di progettazione.

A parte queste osservazioni, andiamo ora a calcolare il valore della massa normalizzata dell'insieme universale attraverso la **Unified Combination Rule** per mettere in evidenza una caratteristica che risulta fondamentale per comprendere il significato della relazione trovata da Inagaki e soprattutto per avere un'idea sul meccanismo che determina il filtraggio del conflitto.

$$\begin{aligned} \mathbf{m}(X) &= (1 + 0.2 \cdot k) \cdot 0.04 + (1 - 0.8 \cdot k) \cdot 0.20 \\ &= \underbrace{0.04}_{m(X)} + \underbrace{0.010264 = 5\% \mathbf{m}(\emptyset)}_{(0.2)(1.283)(0.04)} + \underbrace{-0.00528 = -2.5\% \mathbf{m}(\emptyset)}_{(1 - 0.8 \cdot 1.283)} \end{aligned} \quad (3.31)$$

A partire da questo studio possiamo vedere che è possibile scomporre l'espressione analitica che esprime la diminuzione della massa dell'insieme universale in due funzioni lineari, la cui combinazione dà luogo ad una funzione monotona non-crescente. Prima però di procedere ad uno studio analitico più dettagliato della funzione, in modo tale da giustificare anche la monotonicità, risulta a mio avviso formativo analizzare il suo comportamento per la classe delle regole che interpolano la regola di Dempster, in modo da avere una visione più chiara relativa alla rapidità con cui diminuisce la **Variazione Percentuale della Massa del Null Set** da attribuire all'**Universal Set**.

Studiamo quindi l'altra espressione analitica per α in $[0 \ 1]$.

$$\alpha \in [0 \ 1] \rightarrow \mathbf{f}(\alpha) = (1 - \alpha)\mathbf{k}_D. \quad (3.32)$$

Abbiamo constatato che per $\alpha = 1$ otteniamo la regola di **Yager**, infatti si ha:

$$k = f(1) = 0.$$

Ciò significa che tutto il conflitto viene riversato nell'insieme universale traducendo tutto completamente in uno stato di ignoranza. Spesso questa soluzione si può ritenere ragionevole se lo Stato di conoscenza del sistema non è scarso e quindi la massa dell'insieme universale è esigua. Quindi in situazioni in cui si hanno delle informazioni discordanti è possibile rimettere la nostra decisione ad un'ulteriore acquisizione che ci consenta di ripartire la percentuale dell'insieme universale. Risulta che questa scelta è consigliabile soprattutto in situazioni in cui la regola di Dempster non riesce a gestire una quantità di conflitto significativo per l'applicazione in oggetto.

Infatti, per quanto abbiamo visto nei diversi casi precedenti, basta una lieve perturbazione di una delle bba delle sorgenti per attribuire maggiore credito all'unica ipotesi comune trascurando completamente tutte le altre. Ovviamente occorre tener presente la situazione diametralmente opposta in cui invece se il grado di ignoranza è massimo è opportuno migrare verso la Inagaki's Extra Rule. (In cui vedremo che ho definito una nuova Regola Estrema che ci consentirà di studiare situazioni particolari che appunto Inagaki non ha previsto nel suo range operativo. Quella che personalmente ho definito **Ludo's Extreme Rule**). Quindi in qualche maniera occorre stabilire un **Trade-off** che dipende ovviamente dal problema di ottimizzazione che stiamo considerando.

Detto ciò, vediamo quindi in che cosa si traduce il termine $(1 - \alpha)$ del numeratore. Analizziamo quindi icasi estremi:

1. Se $\alpha = 1$ risulta chiaro che non abbiamo l'operazione di Normalizzazione e quindi $\mathbf{k}=\mathbf{0}$ ed abbiamo la **Yager's Rule**. In questo caso porre il valore del parametro $\alpha = 1$ significa dare il **+100%** della massa del conflitto all'insieme universale. Contrariamente all'altro caso in cui $\alpha = -1$ significa togliere ovvero **-100%** della massa che spetta proporzionalmente ad X ovvero nel caso di Dempster.
2. Se $\alpha = 0$ normalizziamo secondo la regola di **Dempster**.
3. se $\alpha = \frac{1}{2}$?

Che cosa significa trovare il valore $\mathbf{k}_{\frac{YD}{2}}$ che per semplicità indicherò con \mathbf{k}_{YD} per $\alpha = \frac{1}{2}$?

A differenza del caso precedente (in cui era possibile avere lo stesso valore di \mathbf{k} $\alpha \in [-1 \ 0]$ nel caso in cui la regola di Inagaki collassa in quella di Dempster e quindi $k_D = k_I$) qui abbiamo un'unica soluzione.

Nello specifico la massa del Null set viene ripartita in un 50% all'insieme Universale ed un restante 50% in modo proporzionale alle masse non normalizzate degli insiemi del Power Set. Quindi si ha:

$$\begin{array}{ccc}
 & \overbrace{\mathbf{m}(\mathbf{A}) + \mathbf{m}(\mathbf{B}) + \mathbf{m}(\mathbf{X})}^{(0.80)} & \\
 \swarrow & \downarrow & \searrow \\
 \overbrace{m(A) = 0.68}^{85\%} & \overbrace{m(B) = 0.08}^{10\%} & \overbrace{m(AB) = 0.04}^{5\%}
 \end{array} \tag{3.33}$$

Quindi si ha la seguente situazione:

$$\begin{array}{ccc}
 & \text{(0.10)} & \\
 & \overbrace{\mathbf{50\% m}(\emptyset)} & \\
 & \swarrow \quad \downarrow \quad \searrow & \\
 \underbrace{0.085 = 85\%}_{\{A\}} & \underbrace{0.01 = 10\%}_{\{B\}} & \underbrace{0.005 = 5\%}_{\{AB\}}
 \end{array} \tag{3.34}$$

Pertanto risulta che le masse Normalizzate sono:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{m}_N(\mathbf{A}) &= \overbrace{0.068}^{m(A)} + \overbrace{0.085 = 42.5\%}_{85\% \cdot 50\%} \cdot m(\emptyset) \\
 \mathbf{m}_N(\mathbf{B}) &= \overbrace{0.08}^{m(B)} + \overbrace{0.01 = 5.00\%}_{10\% \cdot 50\%} \cdot m(\emptyset) \\
 \mathbf{m}_N(\mathbf{X}) &= \overbrace{0.04}^{m(X)} + \overbrace{0.005 = 2,5\%}_{5\% \cdot 50\%} \cdot m(\emptyset) + \overbrace{0.1}^{\mathbf{50\% m}(\emptyset)} = 0.145
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

Risulta chiaro che la situazione simmetrica a questa si ottiene con le percentuali scambiate per $\alpha = -\frac{1}{2}$.

In tutto questo procedimento abbiamo implicitamente utilizzato la ground probability function per ripartizionare le percentuali; questo è l'elemento base da cui Inagaki ha tirato fuori il modello. Inoltre si evidenzia come la costante di Normalizzazione giochi un ruolo importante. Infatti nella formula $(1 - \alpha)$ che pre-moltiplica k_D rappresenta la percentuale residua di $m(\emptyset)$.

$$\mathbf{k}_{\mathbf{YD}} = (1 - 0.5) \cdot k_D = \frac{1.25}{2} = 0.625$$

Come ultimo passaggio mostriamo la coerenza delle formule di Inagaki per evidenziare un'aspetto interessante:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{m}_N(\mathbf{A}) &= \overbrace{0.068}^{m(A)} + \overbrace{(0.136)(0.625)}^{0.085 = 42.5\%} \cdot m(\emptyset) \\
 \mathbf{m}_N(\mathbf{B}) &= \overbrace{0.08}^{m(B)} + \overbrace{(0.016)(0.625)}^{0.01 = 5.00\%} \cdot m(\emptyset)
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

Queste due funzioni sono Monotone Non-Decrescenti, in cui la rapidità della variazione percentuale dipende dal coefficiente angolare della retta, e quindi del coefficiente che pre-moltiplica \mathbf{k} . Ma analizziamo più nel dettaglio le due funzioni:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{m}_N(\mathbf{A}) &= \overbrace{0.68}^{\text{intercetta}} + \overbrace{0.136}^{\alpha} \cdot \mathbf{k} \\
 \mathbf{m}_N(\mathbf{B}) &= \overbrace{0.08}^{\text{intercetta}} + \overbrace{0.016}^{\beta} \cdot \mathbf{k}
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

L'intercetta è il valore di base iniziale delle masse non normalizzate, ovviamente all'aumentare di k aumenta la belief e diminuisce la plausibility. In particolare osserviamo:

$$\begin{aligned}\frac{\mathbf{m}(\mathbf{A})}{\mathbf{m}(\mathbf{B})} &= \frac{0.68}{0.08} = \mathbf{8.5} \rightarrow m(A) = \mathbf{8.5}m(B). \\ \frac{\alpha}{\beta} &= \frac{0.136}{0.016} = \mathbf{8.5} \rightarrow \alpha = \mathbf{8.5}\beta.\end{aligned}\tag{3.38}$$

Ovvero il rapporto incrementale di $\mathbf{m}_N(\mathbf{A})$ è **8.5** volte maggiore di quello di $\mathbf{m}_N(\mathbf{B})$. Questo si può vedere dalle figure 3.1 e 3.2. In particolare osserviamo che il coefficiente angolare delle rette che definiscono l'andamento delle masse $\mathbf{m}(\mathbf{A})$ e $\mathbf{m}(\mathbf{B})$ al variare di k definisce la **variazione percentuale della massa del Null set** da attribuire ai focal elements al variare di k . In particolare notiamo che per facendo variare di 0.1 unità k i due rispettivi focal elements \mathbf{A} e \mathbf{B} assorbono rispettivamente il **6.8%** e **0.8%** della massa $\mathbf{m}(\emptyset)$. Nello specifico si ha che:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \ k = \mathbf{0.7} &\rightarrow \overbrace{(0.136)}^{\alpha} \cdot \overbrace{(0.7)}^k = 0.0952 = \frac{0.0952}{0.20} \cdot (100) = \mathbf{47.6\%} \ \mathbf{m}(\emptyset) \\ \mathbf{A} \ k = \mathbf{0.8} &\rightarrow \overbrace{(0.136)}^{\alpha} \cdot \overbrace{(0.8)}^k = 0.1088 = \frac{0.1088}{0.20} \cdot (100) = \mathbf{54.4\%} \ \mathbf{m}(\emptyset) \\ \mathbf{B} \ k = \mathbf{0.7} &\rightarrow \overbrace{(0.016)}^{\alpha} \cdot \overbrace{(0.7)}^k = 0.0112 = \frac{0.0112}{0.20} \cdot (100) = \mathbf{5.6\%} \ \mathbf{m}(\emptyset) \\ \mathbf{B} \ k = \mathbf{0.8} &\rightarrow \overbrace{(0.016)}^{\alpha} \cdot \overbrace{(0.8)}^k = 0.0128 = \frac{0.0128}{0.20} \cdot (100) = \mathbf{6.4\%} \ \mathbf{m}(\emptyset) \\ (\mathbf{A})\Delta \% &= (0.8\%) \cdot \mathbf{8.5} = (6.8\%).\end{aligned}$$

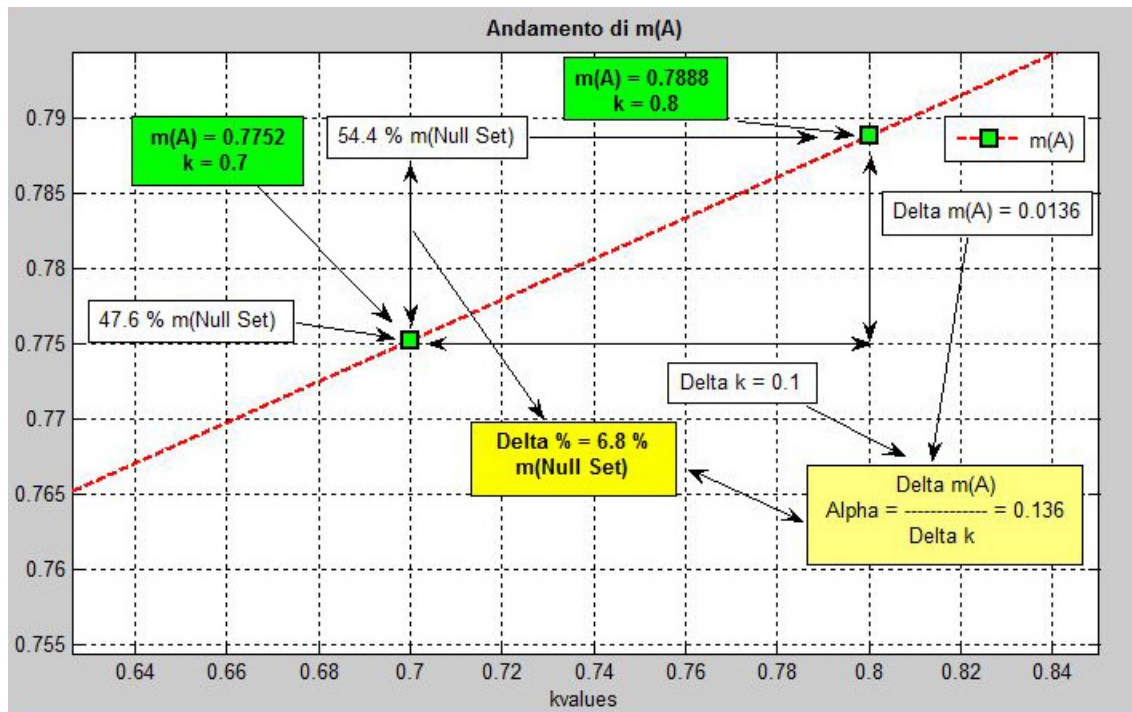


Figura 3.1: variazione percentuale m(A)

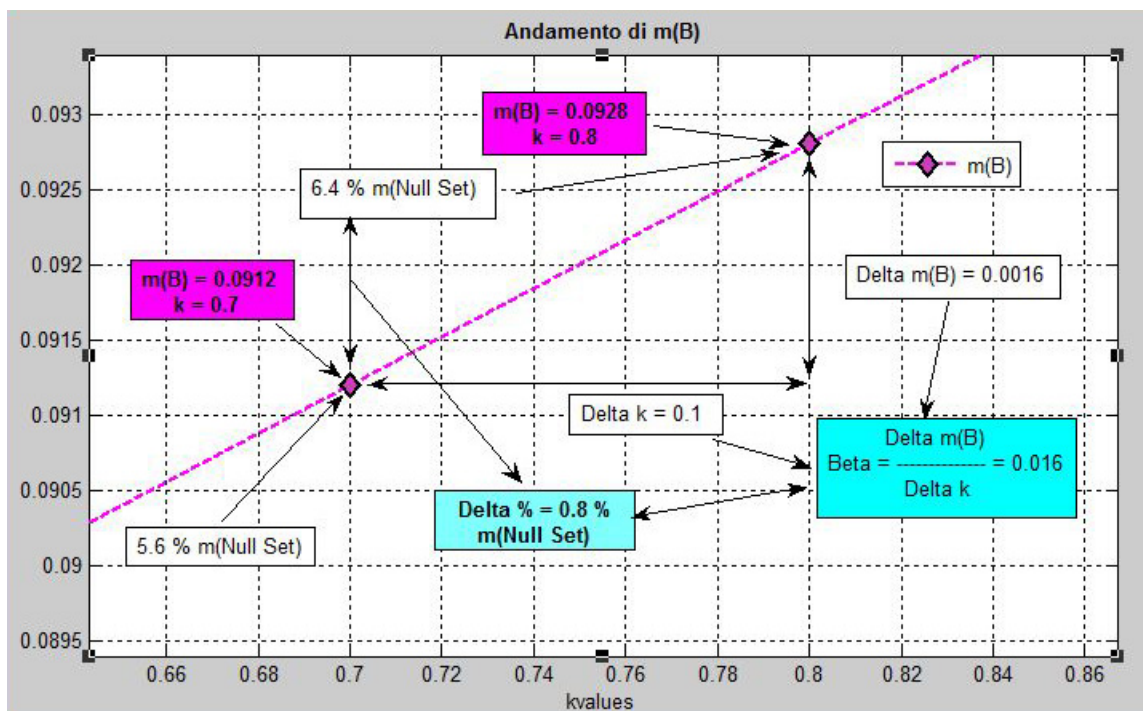


Figura 3.2: variazione percentuale m(B)

A questo punto risulta chiaro il significato del rapporto:

$$\frac{\mathbf{m}(\mathbf{A})}{\mathbf{m}(\mathbf{B})} = \frac{\mathbf{m}_N(\mathbf{A})}{\mathbf{m}_N(\mathbf{B})}.$$

Quindi abbiamo visto che per uno specifico valore di k i rispettivi focal elements assorbono una certa percentuale di $\mathbf{m}(\emptyset)$. La variazione percentuale avviene secondo un rapporto costante che esprime la proporzionalità tra le masse dei rispettivi focal elements. A questo punto risulta immediato ricavare l'espressione analitica relativa a $\mathbf{m}(\mathbf{X})$.

Infatti, se per uno specifico valore di k abbiamo una certa percentuale di $m(\emptyset)$ da assegnare ad \mathbf{A} ed a \mathbf{B} , allora quella residua verrà assegnata all'insieme Universale $\mathbf{X}=\mathbf{A}\mathbf{B}$; ed è data dalla differenza tra la massa $\mathbf{m}(\emptyset)$ (100%) e le corrispondenti percentuali ottenute per \mathbf{A} e per \mathbf{B} .

D'altro canto la **Unified Combination Rule** può essere letta nella seguente maniera:

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_N(\mathbf{A}) &= m(A) + \mathbf{m}(\emptyset) \cdot \overbrace{m(A) \cdot k}^{(\mathbf{A})\% = 8.5(\mathbf{B})\%} \\ \mathbf{m}_N(\mathbf{B}) &= m(B) + \mathbf{m}(\emptyset) \cdot \overbrace{m(B) \cdot k}^{(\mathbf{B})\% = \frac{(\mathbf{A})\%}{8.5}} \\ \mathbf{m}_N(\mathbf{X}) &= m(X) + \overbrace{\mathbf{m}(\emptyset)}^{100\%} - \left[\mathbf{m}(\emptyset) \cdot \overbrace{m(A) \cdot k}^{(\mathbf{A})\% = 8.5(\mathbf{B})\%} + \mathbf{m}(\emptyset) \cdot \overbrace{m(B) \cdot k}^{(\mathbf{B})\% = \frac{(\mathbf{A})\%}{8.5}} \right] \end{aligned} \tag{3.39}$$

La situazione corrispondente all'esempio analizzato in precedenza è riportato in figura

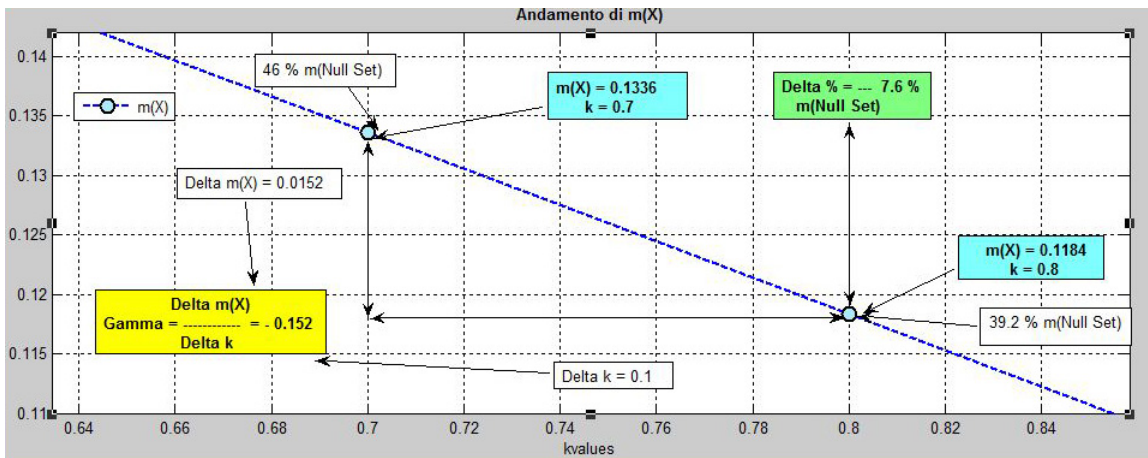


Figura 3.3: variazione percentuale $m(X)$

A questo punto risulta chiaro che non possiamo assorbire più massa di quanto disponibile, ovvero il valore

di k in corrispondenza del quale si esaurisce completamente il serbatoio dell'insieme vuoto è:

$$\underbrace{m(\emptyset)}_{\text{tot \%}} \cdot \underbrace{m(A) \cdot k}_{\text{tot \%}} + \underbrace{m(\emptyset)}_{\text{tot \%}} \cdot \underbrace{m(B) \cdot k}_{\text{tot \%}} \leq m(\emptyset) \quad (3.40)$$

$$k = \frac{1}{m(A) + m(B)}$$

Questa situazione si può facilmente analizzare dalle seguenti figure 3.4 e 3.5 che mostrano come all'aumentare del valore di k aumenti anche la percentuale di $m(\emptyset)$ che viene assorbito dalle rispettive masse. Nello specifico, possiamo osservare che in corrispondenza del valore di $k = 1.316$ si ha la seguente relazione:

$$\begin{aligned} k = 1.316 \quad \rightarrow \quad \Delta(k) = \frac{1.316}{0.1} = 13.16 \quad & \underbrace{\Delta(k)}_{13.16} \cdot \underbrace{\Delta(\%m(\emptyset)_A)}_{6.8} = 89.48\% \\ & + \\ k = 1.316 \quad \rightarrow \quad \Delta(k) = \frac{1.316}{0.1} = 13.16 \quad & \underbrace{\Delta(k)}_{13.16} \cdot \underbrace{\Delta(\%m(\emptyset)_B)}_{0.8} = 10.52\% \\ & = \\ & \mathbf{100\%} \end{aligned}$$

Inoltre è possibile comprendere più a fondo il significato che riveste la Costante k , ed il motivo per cui si chiama appunto Costante. Abbiamo visto in precedenza che per uno specifico valore di k a ciascun focal element viene attribuita una certa percentuale della massa del Null Set, ma **cosa rende comune il valore di k tra le relazioni definite dalla Unified Combination Rule?**

Consideriamo il caso in cui raggiungiamo il massimo valore consentito per k ovvero $k = k_I = 1.316$.

$$\begin{aligned} \Delta m(\mathbf{A})_{k_I} &= \underbrace{m(\mathbf{A})_{k_I}}_{0.8590} - \underbrace{m(\mathbf{A})}_{0.68} = 0.179 \quad \frac{0.179}{0.68} = 0.263 \rightarrow \mathbf{26.3\% m(\mathbf{A})} \\ \Delta m(\mathbf{B})_{k_I} &= \underbrace{m(\mathbf{B})_{k_I}}_{0.1011} - \underbrace{m(\mathbf{B})}_{0.08} = 0.0211 \quad \frac{0.0211}{0.08} = 0.263 \rightarrow \mathbf{26.3\% m(\mathbf{B})} \end{aligned}$$

Ovvero tutti i focal elements subiscono la stessa variazione percentuale rispetto al loro valore non normalizzato. Naturalmente avranno peso maggiore quelle prove che hanno una massa non normalizzata più consistente. Questo è messo in evidenza dalla seguente relazione:

$$\underbrace{\Delta m(\mathbf{A})}_{0.179} + \underbrace{\Delta m(\mathbf{B})}_{0.021} = \underbrace{m(\emptyset)}_{0.20}$$

Quindi cosa rappresentano le aree dei rettangoli che si ottengono in corrispondenza dell'Upper Bound ?

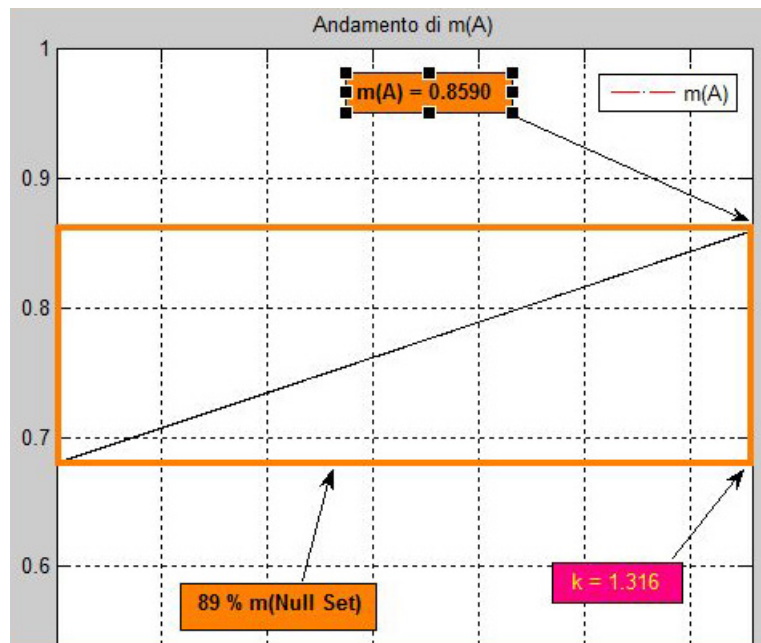


Figura 3.4: Area percentuale $m(A)$

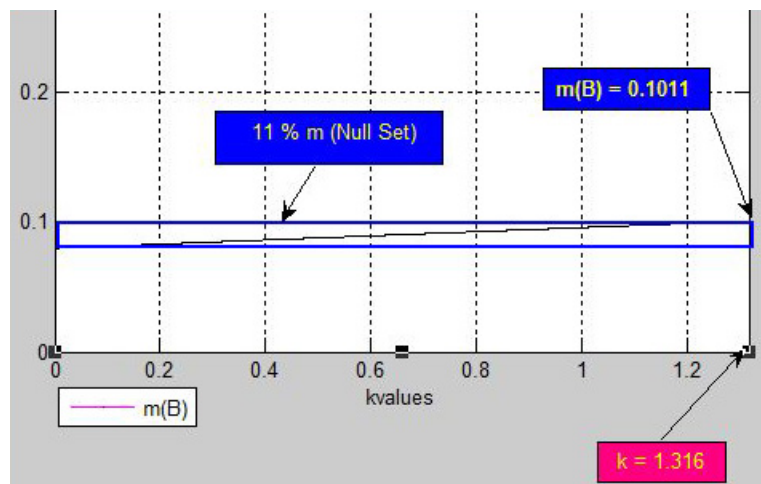


Figura 3.5: Area percentuale $m(B)$

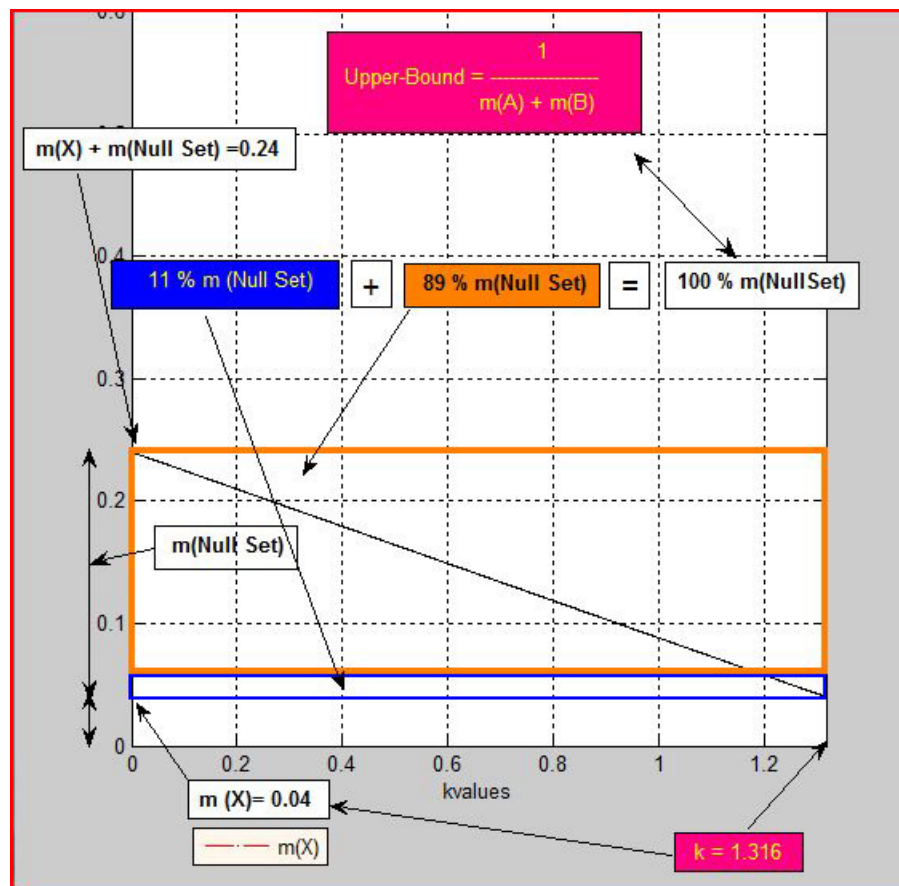


Figura 3.6: Area percentuale $m(X)$

L'interpretazione da attribuire all'area dei rettangoli è legata dalla seguente equazione:

$$\begin{aligned}
\text{Area}(\text{Rettangolo}(\mathbf{A}) + \text{Rettangolo}(\mathbf{B})) &= \frac{m(\emptyset)}{m(A) + m(B)} = \mathbf{m}(\emptyset) \cdot \mathbf{k}_I \\
&= 0.2631 \qquad \qquad \qquad \rightarrow m(\emptyset) = 26.3\%(m(A) + m(B)) \\
\text{Area} - \text{Rettangolo}(\mathbf{A}) &= \mathbf{k}_I \cdot \Delta\mathbf{m}(\mathbf{A}) = 0.2355 \quad \downarrow \rightarrow 23.55\% \\
\text{Area} - \text{Rettangolo}(\mathbf{B}) &= \mathbf{k}_I \cdot \Delta\mathbf{m}(\mathbf{B}) = 0.0275 \quad \rightarrow 2.75\%
\end{aligned} \tag{3.41}$$

In sintesi dato che la massa del Null set è $\mathbf{m}(\emptyset) = 26.3\% (\mathbf{m}(\mathbf{A}) + \mathbf{m}(\mathbf{B}))$, di cui un **23.55%** è da attribuire ad **A** ed il restante **2.75%** a **B**, risulta chiaro che $2.75 \times 8.5 = 23.55$ e quindi $m(A)_{KI} = 8.5m(B)_{KI}$. Inoltre questo valore si raggiunge quando le rispettive masse dei focal elements hanno subito una variazione percentuale rispetto al loro valore non normalizzato pari al **26.3%**. Ad esempio si può verificare che in corrispondenza di \mathbf{k}_D le rispettive masse subiscono una variazione del **25.0%**.

A questo punto è lecito porsi la seguente domanda:

Cosa accade se andiamo oltre l'Upper Bound ?

A questo quesito abbiamo parzialmente risposto in precedenza, ma ora riprenderemo in modo più dettagliato il problema affrontandolo da un punto di vista Analitico.

3.1.3 k parameter Supreme Value-Filtering Uncertainty

Abbiamo visto in precedenza che l'Upper Bound per k si ottiene valutando la proporzionalità tra $\mathbf{m}(\emptyset)$ e la massa complessiva dei focal elements diversi dall'insieme universale. Ora però sorgono le due seguenti domande:

Una volta esaurito il conflitto da redistribuire nel body of evidence è possibile attingere ulteriormente altra massa per i rispettivi focal elements ?

E se tale operazione è possibile che effetto ha sull'applicazione in oggetto?

Per rispondere a queste due domande basta semplicemente osservare l'espressione analitica della **Unified Combination Rule** corrispondente alla massa dell'insieme universale **X**. In particolare osserviamo che per:

$$\mathbf{k} = \frac{1}{m(A) + m(B)} \rightarrow m_N(A) = \mathbf{m}(\mathbf{X}).$$

A questo punto risulta chiaro che l'ulteriore massa che possiamo filtrare tra i focal elements del Power Set è quella relativa all'insieme Universale. Questa operazione a volte è richiesta quando ad esempio il livello di Incertezza legato allo stato di Ignoranza del sistema è elevato e quindi occorre comunque prendere una decisione per evitare di rimanere con le braccia conserte, soprattutto se la nostra applicazione è di tipo Real-Time. Quindi si decide di redistribuire una parte dell'incertezza legata alla massa di **X** in modo proporzionale ai focal elements del Power Set, in modo da 'smuovere' un pò la situazione a favore della bba structure più probabile. Andiamo quindi a calcolare il valore \mathbf{k}_{SUP} (dove il pedice **SUP** è stato personalmente scelto per indicare Supreme o

comunque per distinguerlo da \mathbf{k}_{ext} che viene utilizzato in letteratura per individuare la Inagaki's Extra Rule) in corrispondenza del quale si ha completamente filtrato la massa dell'insieme Universale.

$$\begin{aligned}
\mathbf{m}_{\mathbf{N}}(\mathbf{A}) &= \mathbf{m}(\mathbf{X}) + \mathbf{m}(\emptyset) - \overbrace{m(\emptyset) \cdot k \cdot [m(A) + m(B)]}^{m(X)+m(\emptyset)} = 0 \\
m(X) + m(\emptyset) &= m(\emptyset) \cdot k \cdot [m(A) + m(B)] \\
\mathbf{k} &= \frac{m(X) + m(\emptyset)}{m(\emptyset) \cdot [m(A) + m(B)]} \\
&= \frac{m(\emptyset)}{m(\emptyset) \cdot [m(A) + m(B)]} + \frac{m(X)}{m(\emptyset) \cdot [m(A) + m(B)]} \\
&= \mathbf{k}_{\mathbf{I}} + \mathbf{k}_{\mathbf{I}} \cdot \frac{m(X)}{m(\emptyset)} \\
&= \mathbf{k}_{\mathbf{I}} \cdot \left(1 + \frac{\mathbf{m}(\mathbf{X})}{\mathbf{m}(\emptyset)} \right)
\end{aligned} \tag{3.42}$$

In tale espressione osserviamo due aspetti fondamentali legati al rapporto $\frac{\mathbf{m}(\mathbf{X})}{\mathbf{m}(\emptyset)}$:

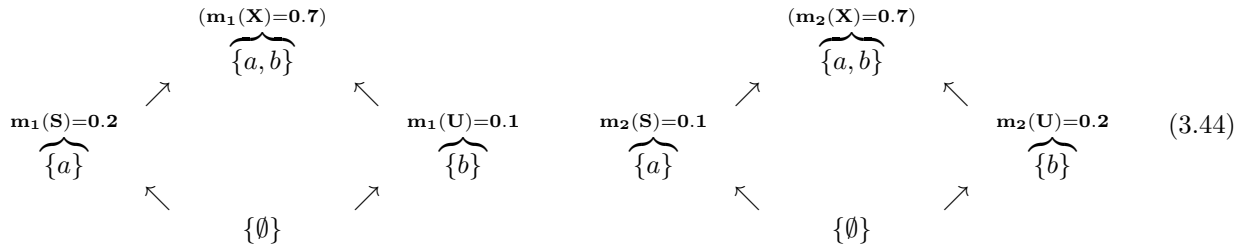
1. In primo luogo risulta chiaro che questa relazione risulta valida per $\mathbf{m}(\emptyset) \neq \mathbf{0}$. Comunque al di fuori dell'aspetto analitico, questo risultato è una conseguenza del significato generale della Unified Combination Rule, la quale serve appunto per ridistribuire l'eventuale conflitto tra le sorgenti del sistema. Appare infatti evidente che le uniche due regole che risultano valide nel caso che sia $\mathbf{m}(\emptyset) = \mathbf{0}$ sono la **Dempster's Rule** e la **Yager's Rule**. Anzi per essere più precisi le due regole coincidono e quindi $\mathbf{k}_{\mathbf{I}} = \mathbf{k}_{\mathbf{D}}$ e quindi non abbiamo dubbi o incertezze in quanto collassa tutto nel corpo delle prove frutto della Conjunctive Combination Rule. (In questo caso non abbiamo gradi di libertà relativi alla scelta di \mathbf{k} in quanto indipendentemente dalla scelta del parametro otteniamo sempre la stessa regola)
2. In secondo luogo se $\mathbf{m}(\emptyset) \neq \mathbf{0}$ osserviamo che il valore di \mathbf{k}_{sup} dipende dal rapporto $\frac{\mathbf{m}(\mathbf{X})}{\mathbf{m}(\emptyset)}$:
 - Se $\mathbf{m}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$ abbiamo che $\mathbf{k}_{\text{sup}} = \mathbf{k}_{\mathbf{I}} = \mathbf{k}_{\mathbf{D}}$. D'altronde questo era naturale aspettarselo dato che l'intervallo $[k_D \quad k_I]$ dipende dall'ulteriore ripartizione della massa del conflitto da attribuire all'insieme universale.
 - Se $\mathbf{m}(\mathbf{X}) > \mathbf{0}$ allora la dimensione dell'intervallo $[k_I \quad k_{\text{sup}}]$ dipende da quanto è grande il rapporto tra l'incertezza ed il conflitto. In particolare se $\mathbf{m}(\emptyset) = \mathbf{m}(\mathbf{X})$ allora $\mathbf{k}_{\text{sup}} = 2\mathbf{k}_{\mathbf{I}}$, questa situazione si verifica anche nel caso in cui ad esempio $\mathbf{m}(\emptyset) = \mathbf{m}(\mathbf{X}) = \sum \mathbf{m}(\mathbf{C}) \quad \forall \mathbf{C} \neq \mathbf{X}, \emptyset$, questo significa che $\frac{1}{3}$ della massa del sistema è presente nei focal elements ed i restanti $\frac{2}{3}$ sono racchiusi nelle masse dell'insieme universale e del Null Set che nello specifico anche qui abbiamo $\frac{1}{3}$ della massa per ciascuno dei rispettivi insiemi.

Per avere un'idea di quanto detto consideriamo il seguente esempio:

Consideriamo una situazione in cui è presente molta incertezza ed il livello di conflitto è basso.

$$\mathbf{m}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.2 \\ 0.1 \\ 0.7 \end{bmatrix} \leftarrow \mathbf{bba}_i \rightarrow \mathbf{m}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \\ 0.2 \\ 0.7 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

Il diagramma di Hasse corrispondente è riportato di seguito 3.44.



Il vettore della **masse non normalizzate** ottenuto dalla fusione delle due Sorgenti è:

$$\mathbf{m}_1 \oplus \mathbf{m}_2 = \begin{bmatrix} \overbrace{0.0500}^{m_{12}} \\ 0.23 \\ 0.23 \\ 0.49 \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

Da questa situazione si può ravvisare che quasi il 50% della massa risiede nell'insieme Universale, il che riflette una grande incertezza e la parte residua è confinata negli altri focal elements. In particolare, si desidera filtrare il conflitto a favore delle uniche due ipotesi presenti nel sistema, che nel nostro caso sono bilanciate. In sostanza vogliamo tradurre questo stato in una distribuzione uniforme.

Per quanto riguarda i valori delle costanti di normalizzazione sono rispettivamente:

$$\mathbf{k}_D = 1.0526 \quad \mathbf{k}_I = 2.1739 \quad \mathbf{k}_S = 23.4783$$

E' opportuno fare la seguente osservazione che mette in evidenza come la risoluzione del controllore risulti fondamentale nell'algoritmo di controllo . Nell'operazione di Tuning del parametro \mathbf{k} abbiamo considerato un passo di campionamento pari a $\mathbf{s} = \mathbf{0.5}$, questo incide notevolmente nelle prestazioni dell'applicazione, osservando che l'ultimo valore valido si ottiene per $\mathbf{k} = \mathbf{23.0}$, il quale fornisce il seguente vettore:

$$m_N = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.4945 \\ 0.4945 \\ 0.0110 \end{bmatrix}$$

Il quale si brucia un bel **1.10%**. Risulta chiaro che con uno step di campionamento pari ad $\mathbf{s} = \mathbf{0.0001}$ otteniamo il valore preciso e desiderato, a discapito però di una maggiore memoria e potenza di calcolo. Quindi in uno stadio preliminare di progettazione deve essere valutata la massima tolleranza ammissibile in termini di errori numerici. Inoltre è possibile verificare che per $\mathbf{k} = \mathbf{23.5} > \mathbf{k}_S$ otteniamo il seguente vettore:

$$m_N = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5003 \\ 0.5003 \\ -0.0005 \end{bmatrix}$$

Ovviamente in questo caso non rispettiamo gli unici **2 vincoli** imposti per le bba structure:

1. Tutte le masse devono risultare positive.
2. La somma delle masse del Power Set deve essere pari ad 1. Nel nostro caso è pari a 1.0001.

Analizzando il grafico 3.7 e 3.8 corrispondente all'andamento della Plausibility e della Belief osserviamo che nel caso di una distribuzione uniforme i loro valori coincidono e sono ovviamente corrispondenti al 50%. Quindi l'incertezza Epistemica collassa in un'incertezza aleatoria. E' possibile fare delle considerazioni analoghe a quelle fatte in precedenza osservando rispettivamente i grafici 3.9

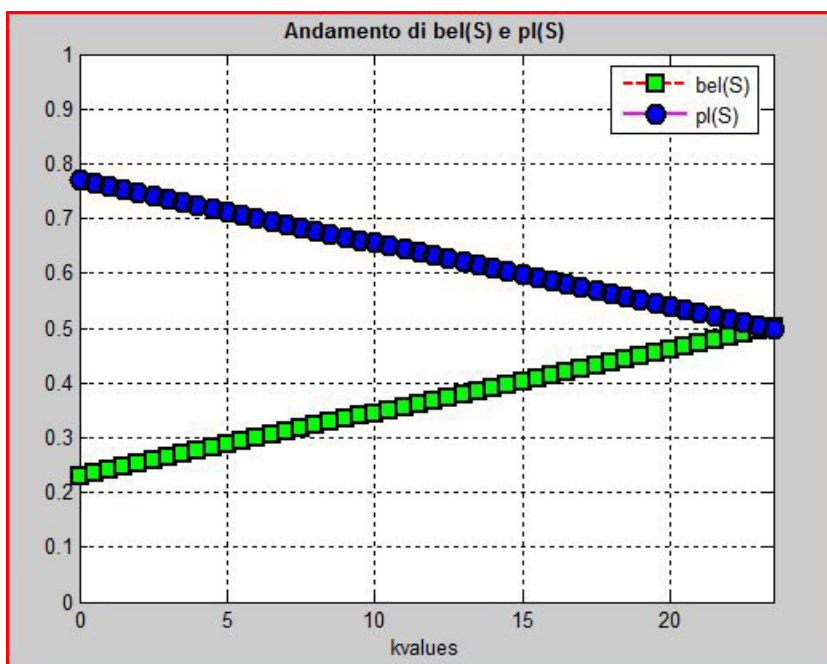


Figura 3.7: Andamento Belief A

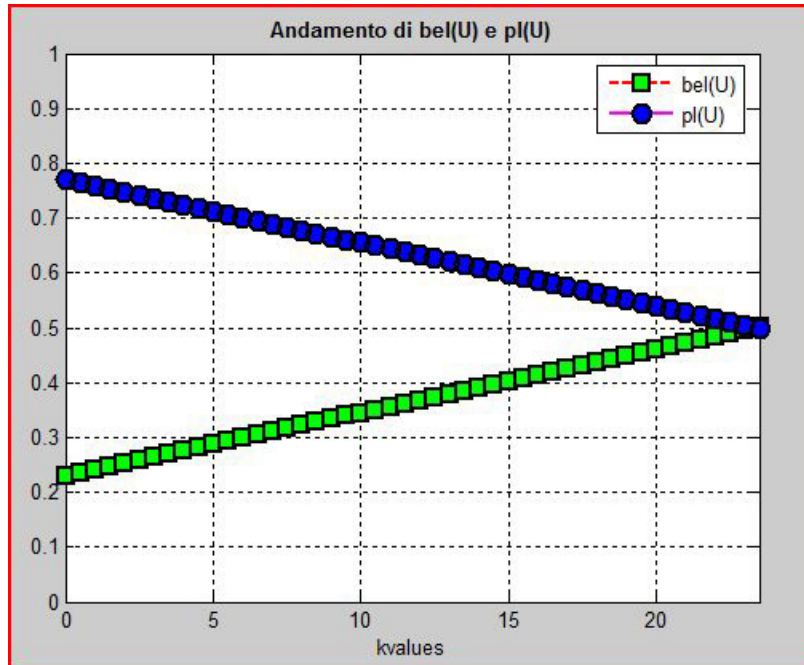


Figura 3.8: Andamento Belief B

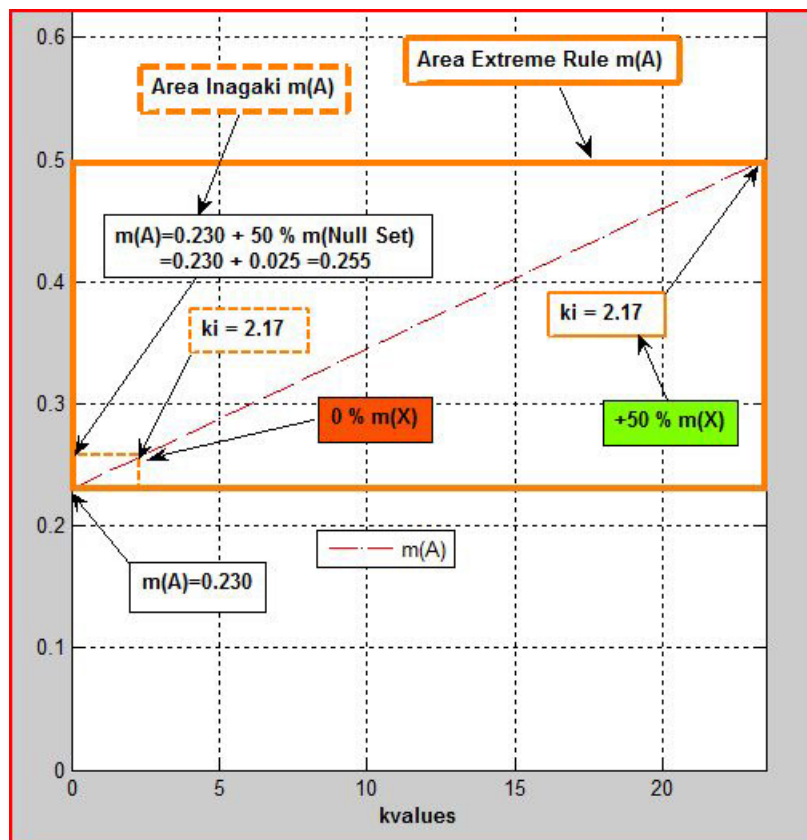


Figura 3.9: Andamento $M(A)$ extreme Rule

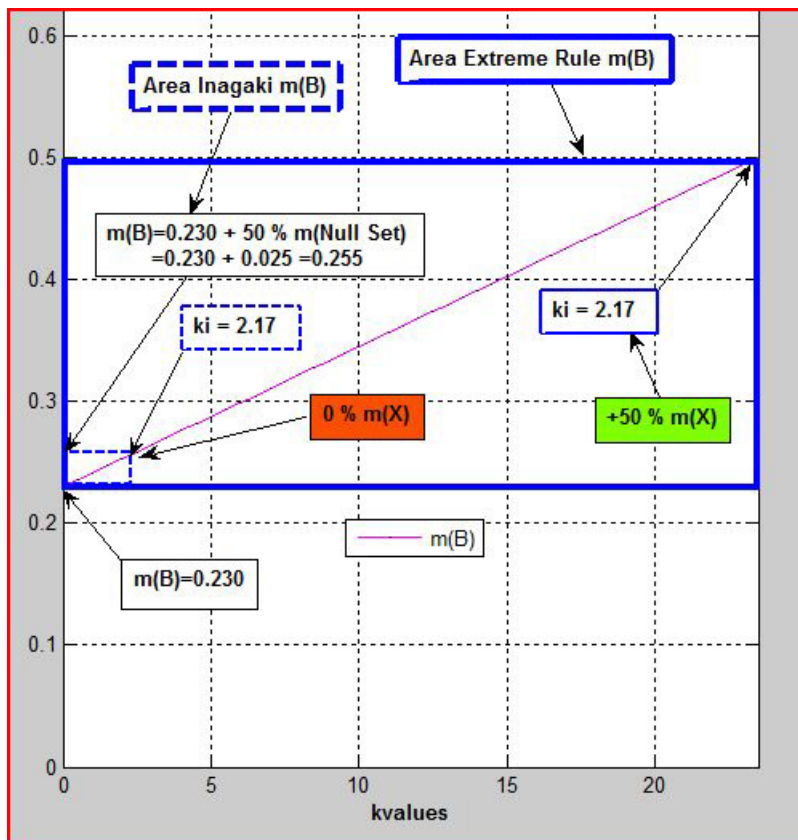


Figura 3.10: Andamento $M(B)$ extreme Rule

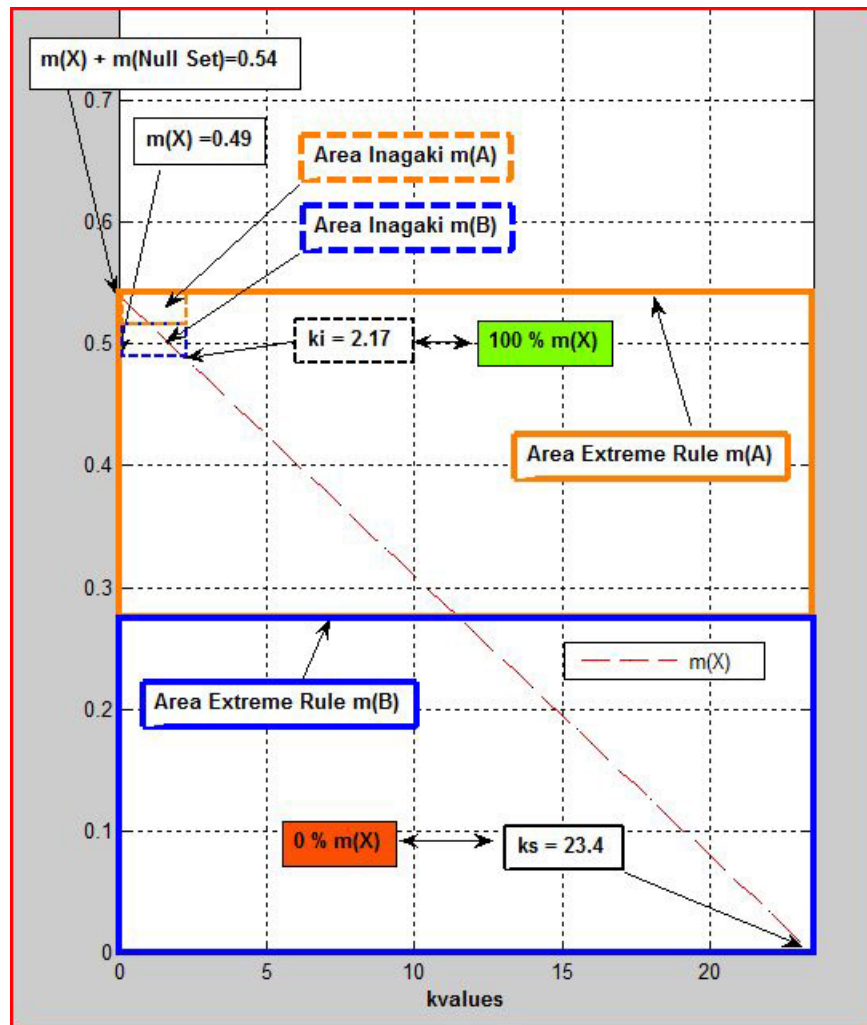


Figura 3.11: Andamento $M(X)$ extreme Rule

3.2 Simulazioni e Risultati

In questo capitolo consideremo alcuni esempi per evidenziare le differenze tra i differenti metodi di Normalizzazione.

3.2.1 Esempio 1: Quando il conflitto risulta significativo

Si supponga di affidarsi alla consulenza di due esperti per individuare la presenza di un guasto all'interno di un Sistema.

Le potenziali cause sono legate a tre Componenti del sistema:

1. **Componente A**
2. **Componente B**
3. **Componente C**

Le distribuzioni di probabilità per le due sorgenti d'informazione sono:

1. Expert 1:

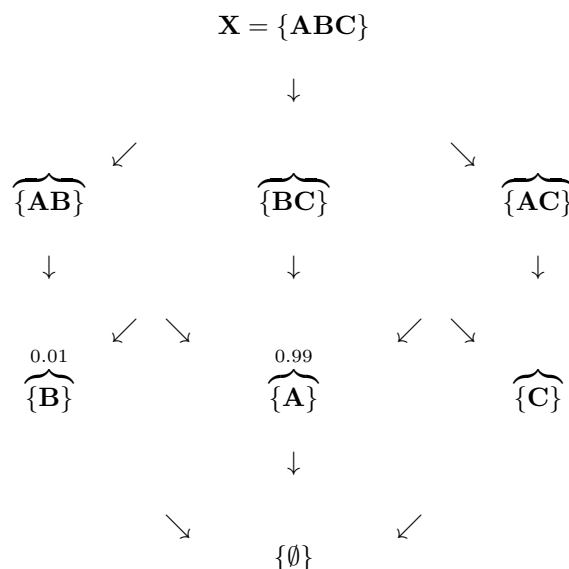
- $m_1(A) = 0.99$ (Danno attribuibile al Componente A)
- $m_1(B) = 0.01$ (Danno attribuibile al Componente B)

Expert 2:

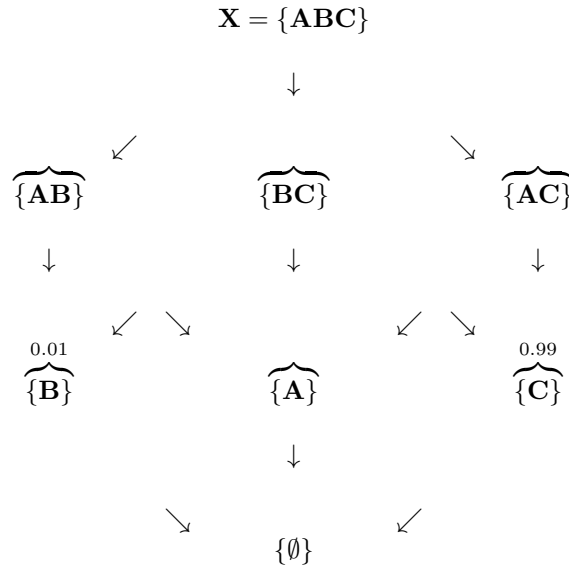
- $m_2(B) = 0.01$ (Danno attribuibile al Componente B)
- $m_2(C) = 0.99$ (Danno attribuibile al Componente C)

I diagrammi di **Hasse** che raffigurano i Reticoli corrispondenti alle due sorgenti:

Sorgente 1:



Sorgente 2:



I corrispondenti vettori che rappresentano le due **bba structure**:

$$\mathbf{m}_1 = \begin{bmatrix} \cdot \\ \mathbf{0.99} \\ \mathbf{0.01} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} \emptyset \\ A \\ B \\ AB \\ C \\ AC \\ BC \\ ABC \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{m}_2 = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{0.01} \\ \cdot \\ \mathbf{0.99} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} . \tag{3.46}$$

Il vettore della **masse non normalizzate (Smets)** ottenuto dalla fusione delle due Sorgenti attraverso la **Conjunctive Combination Rule** è:

$$\mathbf{m}_1 \oplus \mathbf{m}_2 = \begin{bmatrix} \overbrace{0.9999}^{m_{12}} \\ \cdot \\ 0.0001 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \tag{3.47}$$

Si osserva che esiste un notevole conflitto tra le due sorgenti \mathbf{S}_1 , \mathbf{S}_2 ; vediamo come questo conflitto si ripercuote sulla scelta del parametro \mathbf{k} .

- **k = 0. Yager’s Rule:** In questa circostanza Yager confina tutto il conflitto presente nel sistema nell’insieme universale, traducendolo in uno stato di totale ignoranza. In sintesi abbiamo delle informazioni che risultano in contraddizione per le quali non siamo in grado di prendere una decisione e pertanto ci

atteniamo ad un'ulteriore consultazione od analisi prima di pronunciare qualcosa a riguardo.

$$\mathbf{m}_{12} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{0.0001} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{0.9999} \end{bmatrix}$$

- $k = 10^4$. **Dempster's Rule and Inagaki's Rule:** In questa caso le due regole coincidono in quanto non abbiamo massa associata all'insieme Universale. In particolare notiamo dal vettore normalizzato delle masse che essendo **B** l'unica prova comune tra le due sorgenti ,che comunque riscuote poca fiducia da entrambe gli esperti, è quella a cui viene attribuita tutta la massa del conflitto, giungendo alla conclusione sbagliata che la causa del guasto sia da addebitare al Componente B.

$$\mathbf{m}_{12} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

In particolare osserviamo che tra il **Lower Bound** $k=0$ e l'**Upper Bound** $k_D = 10^4$ abbiamo ben **4 ordini di grandezza** . Questo ovviamente è legato alla presenza di un notevole conflitto tra le due sorgenti del sistema, il quale si ripercuote sulla scelta del valore del parametro k (e quindi della corrispondente regola da applicare). Nello specifico il passaggio da una Regola ad un'altra incide notevolmente sul vettore delle masse normalizzate \mathbf{m}_N .

Occorre quindi studiare la massima **tolleranza** consentita tra un valore di k ed un'altro. In poche parole si pone il problema della **sensibilità numerica** di \mathbf{m}_{12N} , al variare del parametro k e quindi della scelta della costante di normalizzazione.

Risulta chiaro che le funzioni che descrivono l'andamento di $\mathbf{m}(\mathbf{A}), \mathbf{m}(\mathbf{B}), \mathbf{m}(\mathbf{C})$ sono **Funzioni Monotone Non Decrescenti**. In particolare nel nostro esempio l'unica funzione crescente è ovviamente $\mathbf{m}(\mathbf{B})$, le altre sono semplicemente non decrescenti. Tuttavia occorre stabilire in funzione della risoluzione dai dati forniti dalle specifiche , per quali valori di k il vettore delle masse non normalizzate rimane invariato. O per essere più precisi, dobbiamo valutare il passo di campionamento idoneo o comunque significativo per la risoluzione dei dati a nostra disposizione ed ovviamente la risoluzione dei nostri elaboratori.

Quindi, sebbene idealmente si abbiano infinite regole o come le definisce Inagaki un **Continuum** di Regole comprese tra il minimo valore di k ed il massimo valore consentito; nella realtà dei fatti il loro numero risulta finito e dipende dalla precisione richiesta. Questo si può vedere dalle seguenti figure [3.12](#) e [3.13](#).

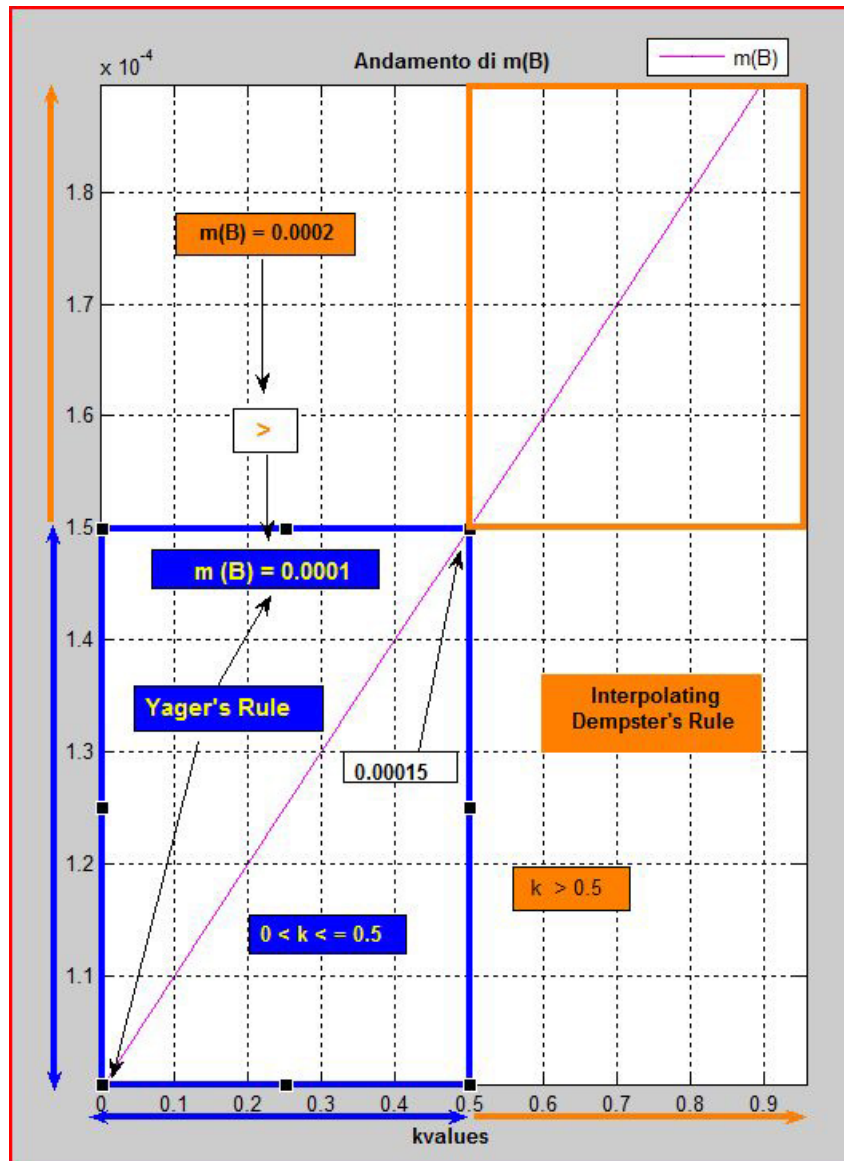


Figura 3.12: k sensitive $m(B)$

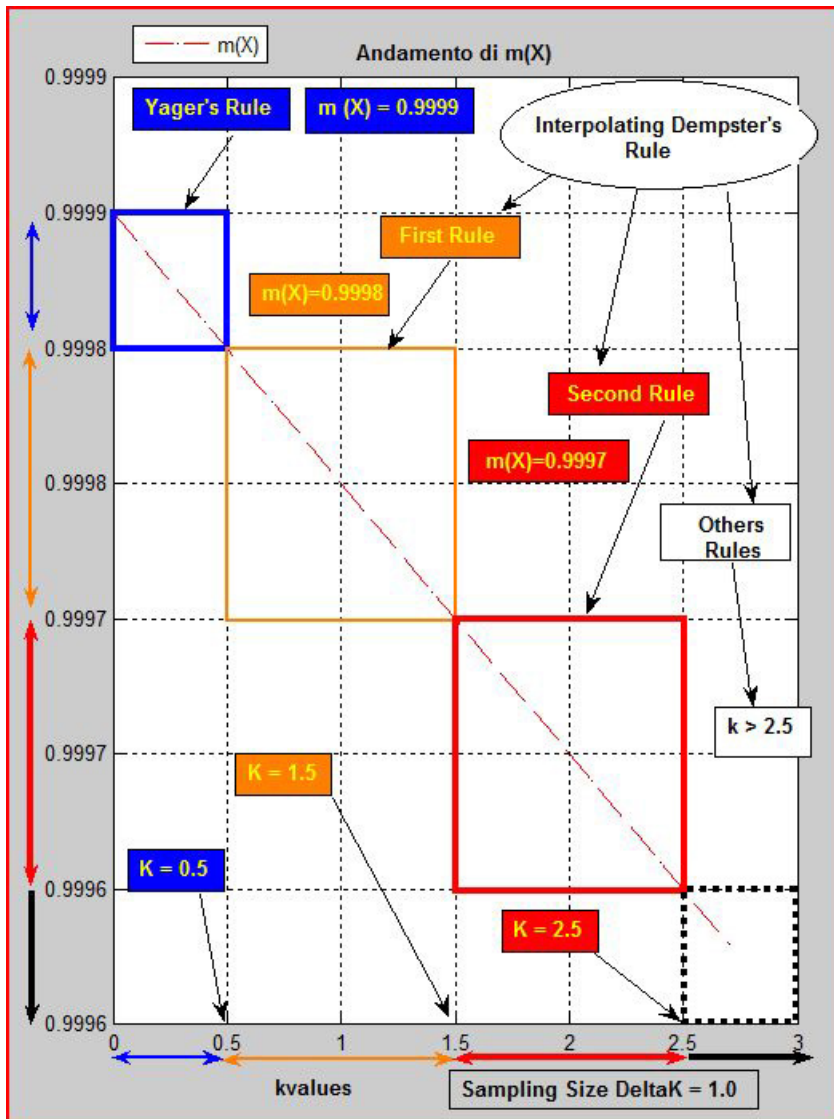


Figura 3.13: k sensitive m(X)

Quindi se consideriamo una risoluzione con 4 cifre decimali dopo la virgola ovvero **resolutive** = 10^{-4} avremo in totale 10^4 regole. Ovviamente per k_D il valore di $\mathbf{m}(\mathbf{B})$ sarà aumentato di 10 mila volte quello iniziale.

Naturalmente la situazione diametralmente opposta si ottiene quando le opinioni dei due esperti sono concordanti ed abbiamo solo un minimo dubbio relativo alle altre ipotesi.

I corrispondenti vettori che rappresentano le due **bba structure**:

$$\mathbf{m}_1 = \begin{bmatrix} \cdot \\ \mathbf{0.01} \\ \mathbf{0.99} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} \emptyset \\ A \\ B \\ AB \\ C \\ AC \\ BC \\ ABC \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{m}_2 = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{0.99} \\ \cdot \\ \mathbf{0.01} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}. \quad (3.48)$$

Il vettore della **masse non normalizzate (Smets)** ottenuto dalla fusione delle due Sorgenti attraverso la **Conjunctive Combination Rule** è:

$$\mathbf{m}_1 \oplus \mathbf{m}_2 = \begin{bmatrix} \overbrace{0.0199}^{m_{12}} \\ \cdot \\ 0.9801 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

Si osserva che in questo caso il conflitto è quasi inesistente; vediamo come questo si ripercuote sulla scelta del parametro k .

- $k = 0$. **Yager's Rule**:

$$\mathbf{m}_{12} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{0.9801} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{0.0199} \end{bmatrix}$$

- $k = 1.023$. **Dempster's Rule and Inagaki's Rule**: In questa caso le due regole coincidono in quanto non abbiamo massa associata all'insieme Universale. In particolare notiamo dal vettore normalizzato delle masse che essendo \mathbf{B} l'unica prova comune tra le due sorgenti è quella che riscuote maggiore consenso,

ovvero il 98%; e quindi la sua variazione percentuale sarà solo circa del 2%.

$$\mathbf{m}_{12} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

Per avere una retrospettiva di quanto avviene, è possibile analizzare i seguenti grafici 3.14 e 3.15.

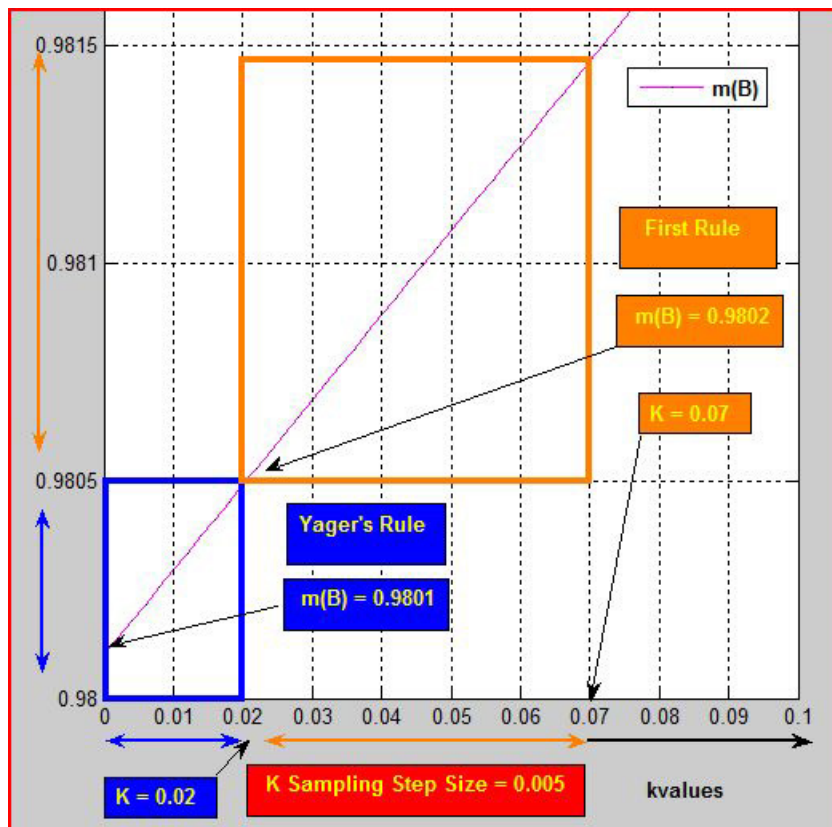


Figura 3.14: k low-sensitive m(B)

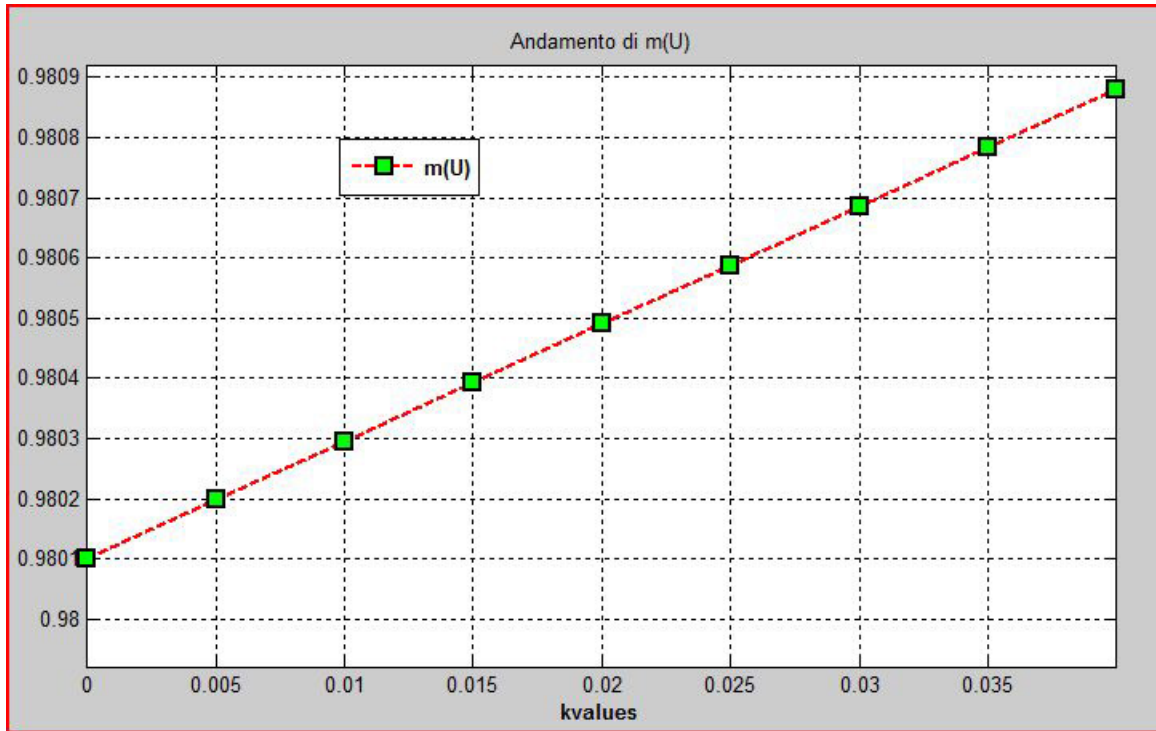


Figura 3.15: k sampling-size m(B)

Si è quindi di gran lunga assottigliato il range operativo di k . Nello specifico notiamo che il passo di campionamento idoneo per l'applicazione è pari a **k Sampling size $k_T = 0.005$** che da luogo quindi a **205** regole. Ben $\frac{1}{50}$ rispetto a prima. Quindi a seconda della variazione percentuale significativa per l'applicazione possiamo eventualmente scremare questo pool di regole in funzione delle nostre specifiche.

Consideriamo ora una situazione intermedia in cui si concorda ad un **50%** sull'ipotesi **B** ed un restante **50%** discordante. In altre parole considerate singolarmente le due consulenze non danno molta informazione, in quanto descrivono due distribuzioni uniformi rispettivamente per le due ipotesi **AB** per la sorgente 1 e **BC** per la sorgente 2. Se tuttavia le consideriamo congiuntamente attraverso l'operazione di combinazione possiamo tirar fuori qualcosa di utile. Cerchiamo quindi di capire che possibilità ci offre il range operativo di k .

I corrispondenti vettori che rappresentano le due **bba structure**:

$$\mathbf{m}_1 = \begin{bmatrix} \cdot \\ \mathbf{0.50} \\ \mathbf{0.50} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} \emptyset \\ A \\ B \\ AB \\ C \\ AC \\ BC \\ ABC \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{m}_2 = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{0.50} \\ \cdot \\ \mathbf{0.50} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

Il vettore della **masse non normalizzate (Smets)** ottenuto dalla fusione delle due Sorgenti attraverso la

Conjunctive Combination Rule è:

$$\mathbf{m}_1 \oplus \mathbf{m}_2 = \begin{bmatrix} \overbrace{0.75}^{m_{12}} \\ \cdot \\ 0.25 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

Si osserva che in questo caso il conflitto sebbene non sia massimo comunque non è trascurabile, esso è ben $\frac{3}{4}$ della massa totale del Power Set; vediamo come questo si ripercuote sulla scelta del parametro k .

- **$k = 0$. Yager's Rule:**

$$\mathbf{m}_{12} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{0.25} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{0.75} \end{bmatrix}$$

- **$k = 4$. Dempster's Rule and Inagaki's Rule:** In questo caso osserviamo che otteniamo un valore secco. Questo era da aspettarselo, dato che abbiamo visto che in corrispondenza del Lower Bound avevamo un rapporto di $1 : 4$, nell'ipotesi più conservativa.

$$\mathbf{m}_{12} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

Andiamo quindi ad analizzare i rispettivi grafici [3.16](#) e [3.17](#).

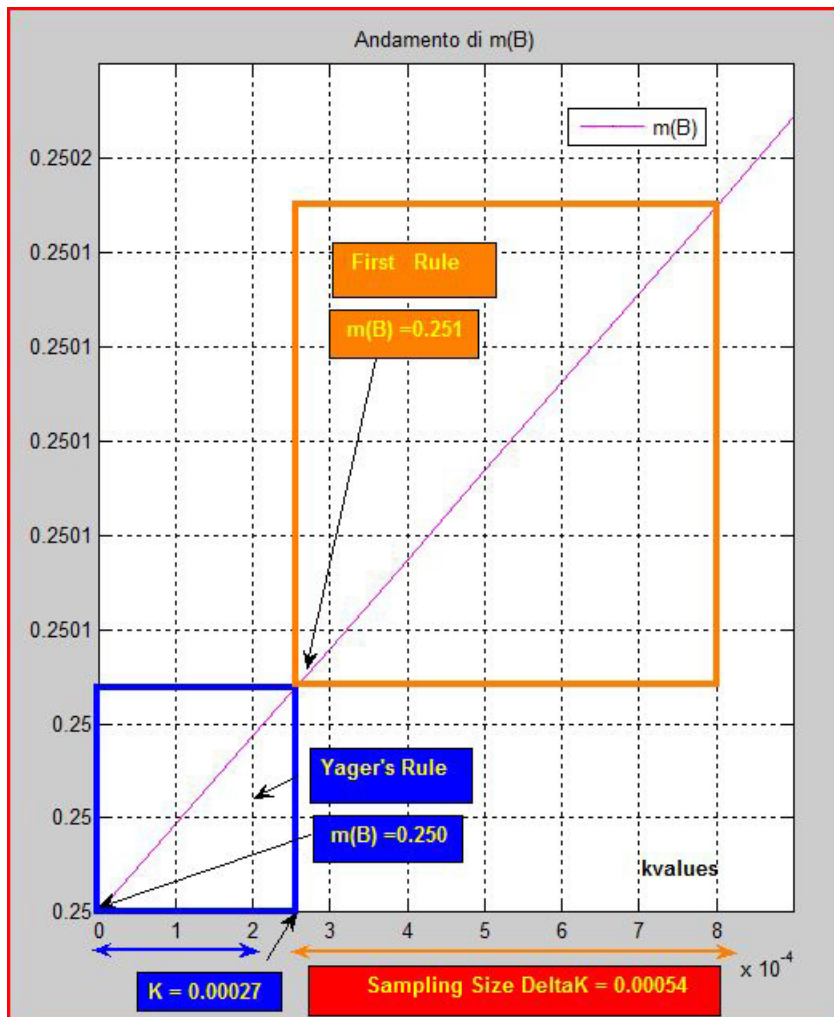


Figura 3.16: k intermediate m(B)

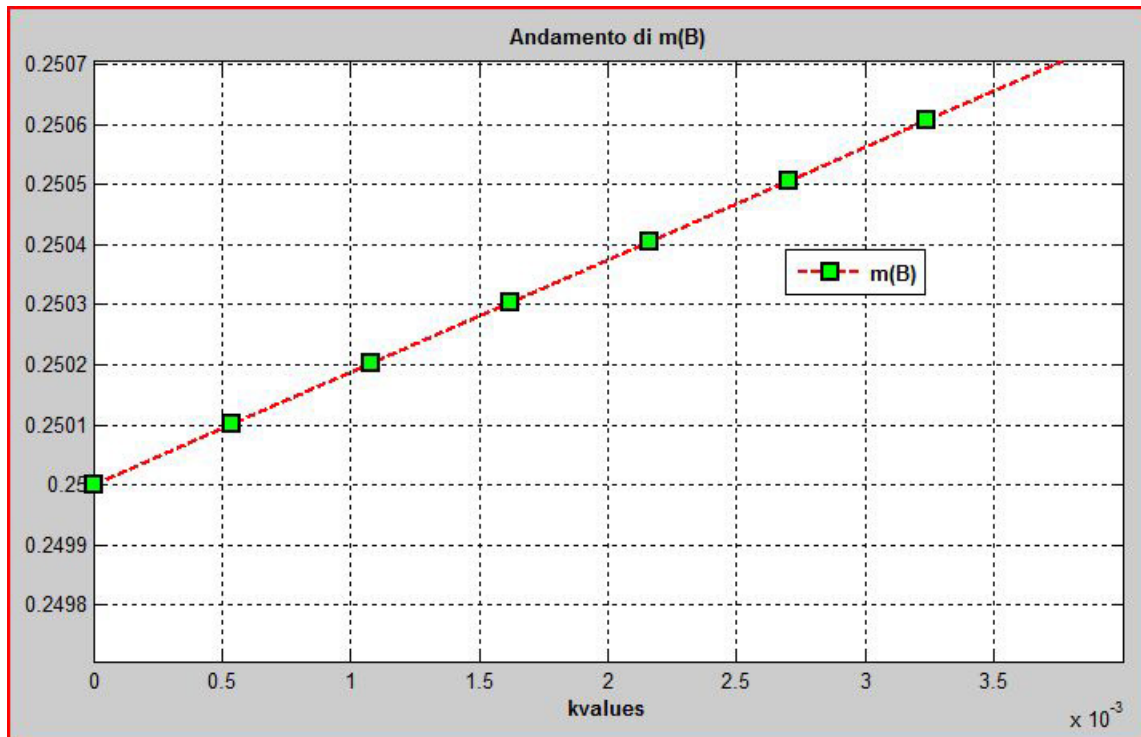


Figura 3.17: k sampling-size intermidate m(B)

Quindi in questo caso il passo di campionamento significativo per individuare tutte le regole utili è pari a $k_T = 0.00054$; pertanto avremo in totale ben **7407** campioni. Tra le possibili scelte una ragionevole potrebbe essere quella di attribuire un **50%** all'ipotesi **B** ed il restante all'insieme universale. Come è possibile tradurre questa decisione in un valore idoneo di k che ci consenta di individuare la regola per la quale sia possibile rappresentare tale stato?

In realtà la risposta non è difficile. Infatti basta osservare il rapporto delle masse del sistema per $k=0$. Abbiamo che $m(B) = \frac{1}{3}$ di $m(X)$, per cui basterà semplicemente dividere $frack_D3 = 1.\bar{3}$ ed otteniamo un 50% per l'ipotesi **B** ed il restante **50%** che da spazio alle altre possibilità. Effettivamente considerando $k_T = 0.00054$ si trova che il valore esatto per cui ciò avviene è $k = 1.3335$. Ciò si può vedere dai seguenti grafici 3.18 e 3.19.

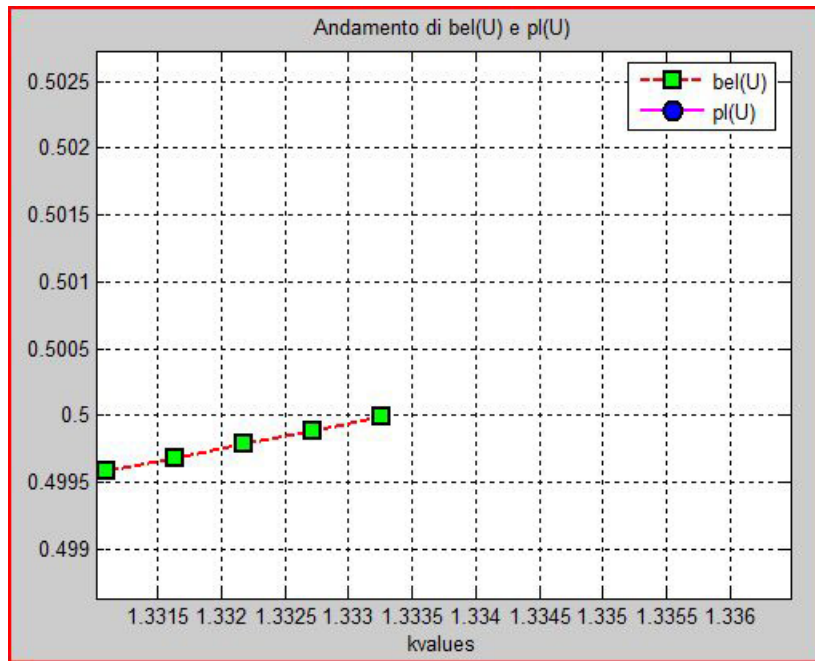


Figura 3.18: k intermediate 50 % m(B)

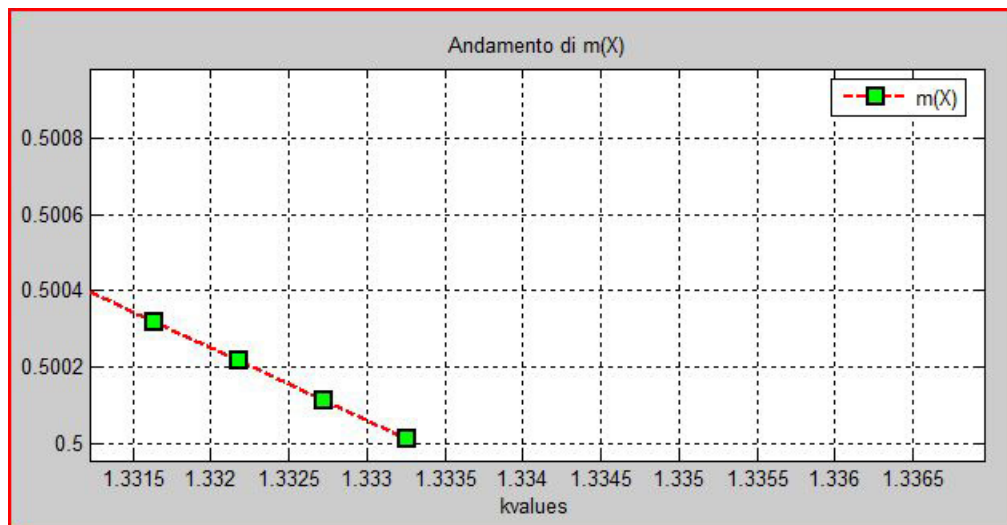


Figura 3.19: k sampling-size intermidate 50 % m(X)

3.2.2 Valutazione dell'incertezza e del Conflict Gap

Example 1:

Compreso quindi il significato di selezionare un'opportuno valore di k nell'intervallo del range operativo; vediamo cosa accade se nel sistema è presente anche dell'incertezza legata alla Non conoscenza della possibile causa del guasto.

Possibilità di Non Conoscenza: Supponiamo di trovarci nella situazione in cui i nostri esperti riconoscono 'umilmente' di non essere in grado di individuare il guasto del sistema al 100%, ma hanno buone ragioni per accreditare la colpa ad uno dei componenti. Quindi consideriamo le seguenti **bba structures**:

$$\mathbf{m}_1 = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{0.50} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{0.50} \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} \emptyset \\ A \\ B \\ AB \\ C \\ AC \\ BC \\ ABC \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{m}_2 = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{0.50} \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{0.50} \end{bmatrix}. \quad (3.52)$$

Il vettore della **masse non normalizzate (Smets)** ottenuto dalla fusione delle due Sorgenti attraverso la **Conjunctive Combination Rule** è:

$$\mathbf{m}_1 \oplus \mathbf{m}_2 = \begin{bmatrix} \overbrace{0.25}^{m_{12}} \\ \cdot \\ 0.25 \\ \cdot \\ 0.25 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0.25 \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

In cui notiamo che la massa del sistema è equidistribuita tra le due ipotesi e l'insieme Universale ed il Null Set. Questo da luogo ad una nuova situazione rispetto al caso precedente. Infatti, oltre alla massa relativa all Null Set, abbiamo anche quella corrispondente all'insieme Universale, da ridistribuire tra le ipotesi del Power Set. Studiamo quindi come questo si traduce nelle rispettive regole di combinazione.

- **$k = 0$. Yager's Rule:** In corrispondenza del Lower Bound di k , si ha una visione più conservativa, in cui non ci affidiamo molto sulle valutazioni dei due esperti, o per lo meno manteniamo una certa distanza nel giungere ad una conclusione definitiva. Infatti il **50%** di **Ignoranza** ed una distribuzione uniforme per le due ipotesi non escludono la possibilità che possa essere anche l'ipotesi **A** che non è stata individuata dai due esperti.

$$\mathbf{m}_{12} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{0.25} \\ \cdot \\ \mathbf{0.25} \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{0.25} \end{bmatrix}$$

- **k = 1.3. Dempster's Rule** : In questo caso abbiamo una situazione **Baricentrale** in cui, analogamente al caso precedente lasciamo ancora aperta la strada per l'ipotesi **A**, però riducendo ulteriormente l'incertezza a favore dell'ipotesi **B** e **C**. D'altronde il conflitto è stato equidistribuito tra i tre insiemi ($\frac{0.25}{3} = 0.\bar{3}$)

$$\mathbf{m}_{12} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{0.\bar{3}} \\ \cdot \\ \mathbf{0.\bar{3}} \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{0.\bar{3}} \end{bmatrix}$$

- **k = 2. Inagaki's Rule** : Diamo maggiore credito alle due opinioni degli esperti lasciandoci comunque una piccola possibilità (o se preferiamo dubbio potrebbe essere la parola più appropriata) che il guasto possa risiedere in **A**. Infatti osserviamo che abbiamo dimezzato l'incertezza iniziale dei due esperti, ripiegando la nostra convinzione soggettiva che le consulenze dei due esperti siano autorevoli.

$$\mathbf{m}_{12} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{0.3750} \\ \cdot \\ \mathbf{0.3750} \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{0.3750} \end{bmatrix}$$

- **k = 2. Extreme Rule** : Situazione estrema in cui effettivamente non lasciamo spazio al dubbio ed escludiamo dai giochi **A** e ci affidiamo totalmente alle uniche due ipotesi avanzate dai due esperti. in questo caso si traduce in una distribuzione uniforme solo su **A** e **B**.

$$\mathbf{m}_{12} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{0.50} \\ \cdot \\ \mathbf{0.50} \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}$$

Risulta chiaro che da questa situazione emerge una maggiore scelta di Regole **Eterogene** tra loro. Infatti, sebbene abbiamo visto che nel caso di assenza di Dubbio (Incertezza) e notevole conflitto tra le sorgenti, si abbiano un numero elevato di Regole (che idealmente tende all'infinito); tali regole risultavano comunque classificabili all'interno del primo intervallo dei valori di k , che personalmente definirei come il **conflict gap**. Ora si presentano ben **3 intervalli**, ognuno dei quali assume un significato ben preciso. In particolare gli altri due sono personalmente definiti come **conflict-ignorance gap** ed il **ignorance-no-doubt gap**. Il significato dovrebbe ormai essere chiaro in base alle considerazioni fatte precedentemente per le varie costanti. Ora valuteremo per ogni classe il numero delle Regole possibili all'interno di suddetti intervalli.

In particolare è possibile vederr dal seguenti graficio [3.20](#) che il passo di campionamento idoneo è pari a $k_T = 0.0016$, per il quale otteniamo complessivamente **2500 Rule**, le quali vengono ridistribuite nei seguenti

intervalli secondo quanto riportato in figura 3.25 Dalle figure 3.22,3.23, 3.24 è possibile comprendere in termini di Credibilità e Plausibilità, l'andamento delle Tre ipotesi in oggetto.

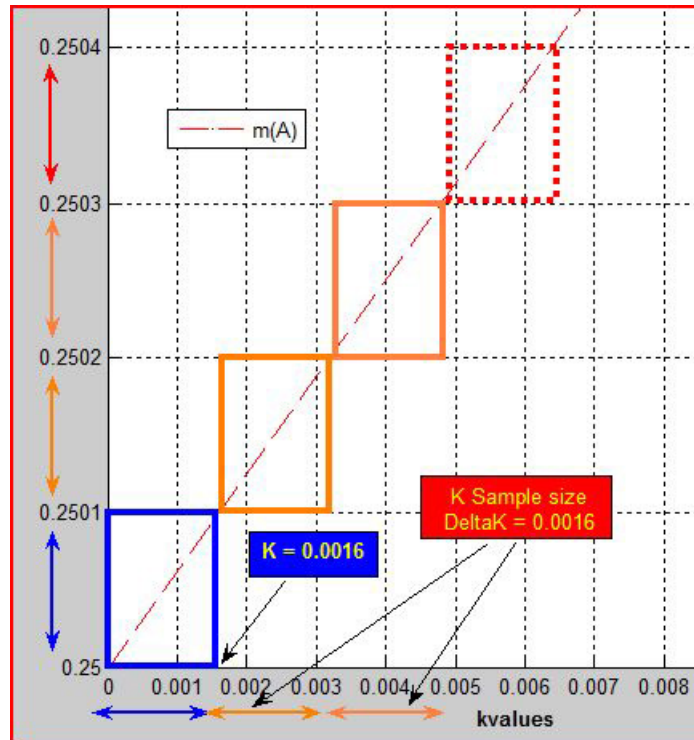


Figura 3.20: k-sample size ignorance

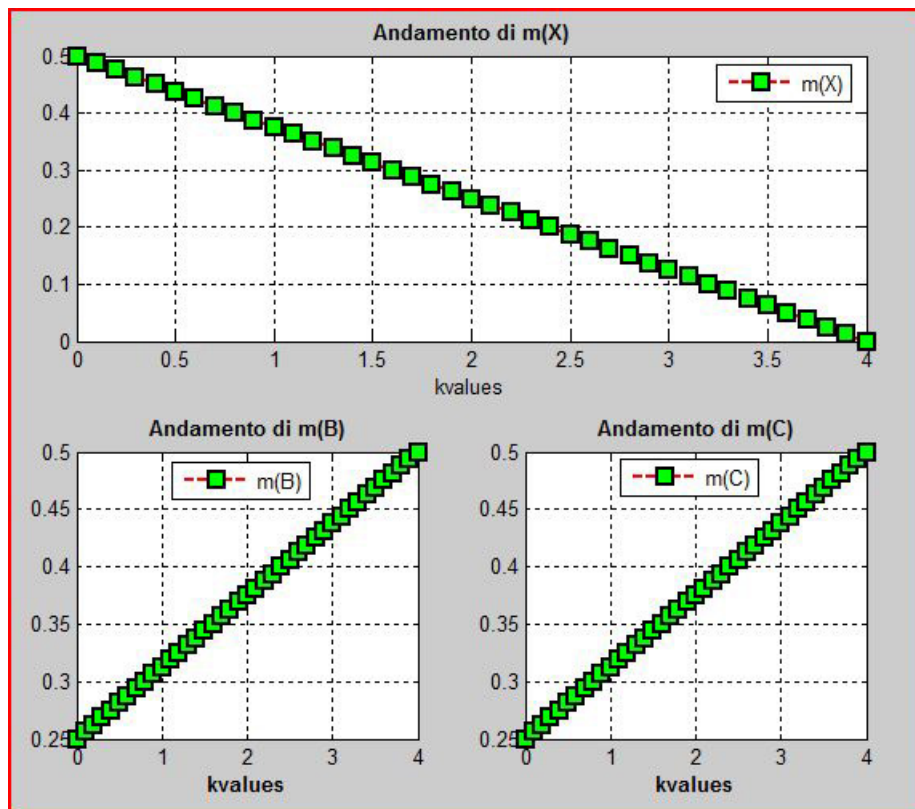


Figura 3.21: andamento masse

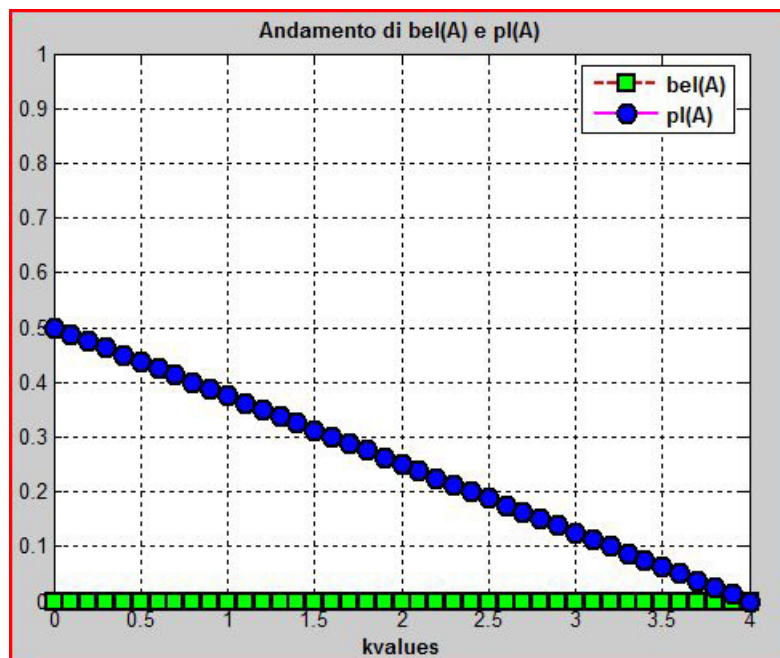


Figura 3.22: Ipotesi A

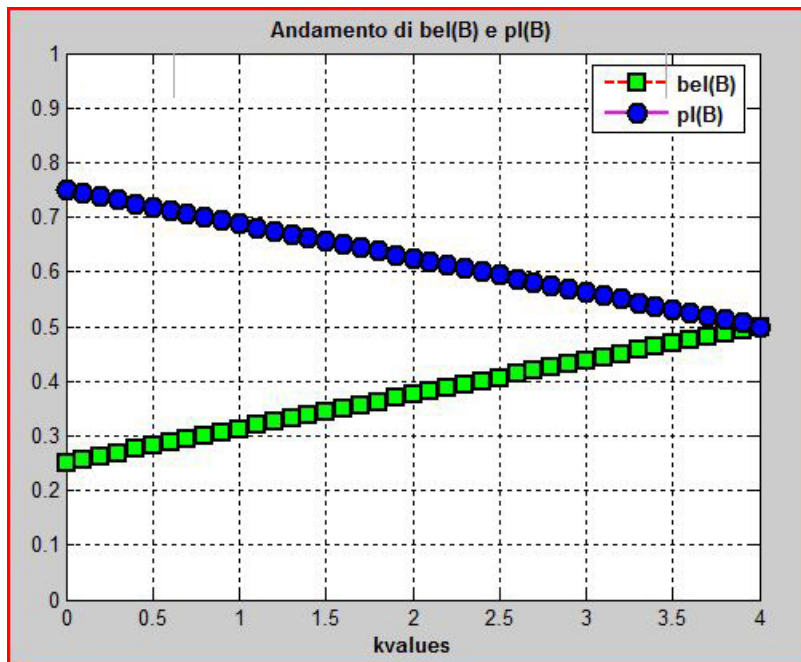


Figura 3.23: Ipotesi B

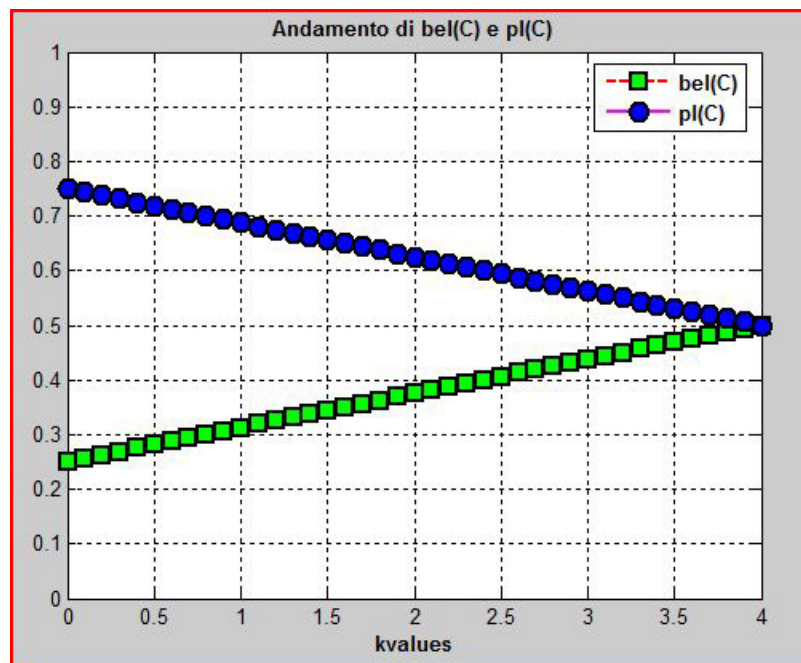


Figura 3.24: Ipotesi C

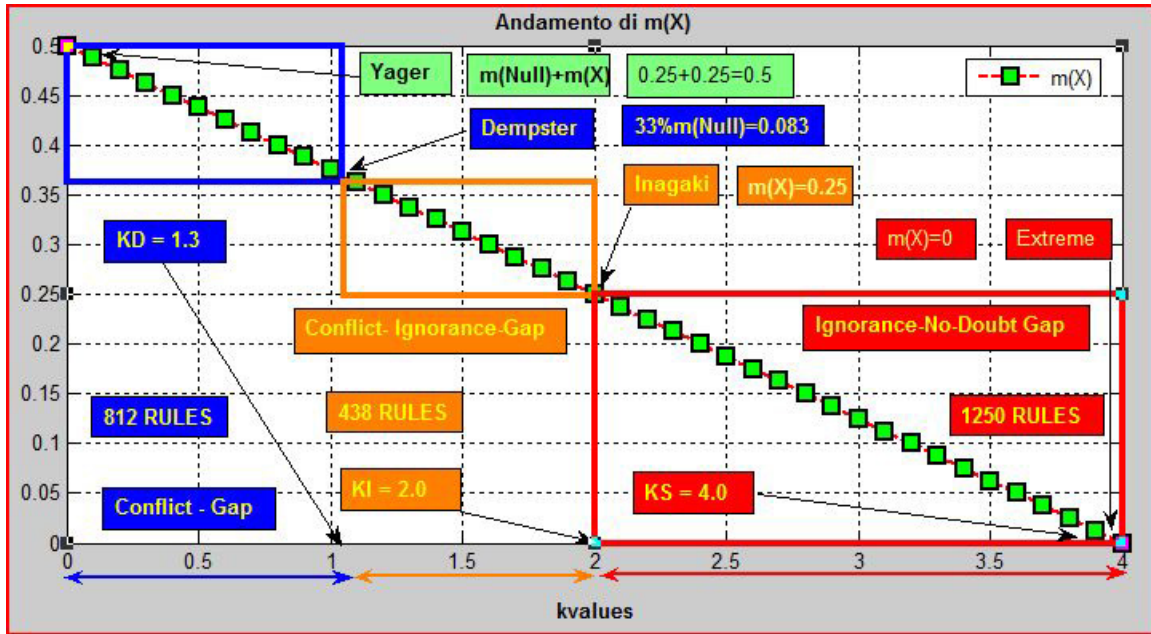


Figura 3.25: Rules Distributions

Example 2:

Consideriamo ora il caso in cui i due esperti siano maggiormente convinti della loro diagnosi e lasciano solo un margine di dubbio.

$$\mathbf{m}_1 = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ 0.75 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0.25 \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} \emptyset \\ A \\ B \\ AB \\ C \\ AC \\ BC \\ ABC \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{m}_2 = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0.75 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0.25 \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

Il vettore della **masse non normalizzate (Smets)** ottenuto dalla fusione delle due Sorgenti attraverso la **Conjunctive Combination Rule** è:

$$\mathbf{m}_1 \oplus \mathbf{m}_2 = \begin{bmatrix} \overbrace{0.5625}^{m_{12}} \\ \cdot \\ 0.1875 \\ \cdot \\ 0.1875 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0.0625 \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

- **k = 0. Yager's Rule:** In questo caso siamo piuttosto diffidenti perchè vediamo che le consulenze vanno su due binari opposti e quindi rimettiamo tutto il dubbio dell'Insieme Universale

$$\mathbf{m}_{12} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{0.1875} \\ \cdot \\ \mathbf{0.1875} \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{0.6250} \end{bmatrix}$$

- **k = 2.2857. Dempster's Rule :** In questo caso diciamo che tutto sommato che se sono convinti di ciò che dicono, molto probabilmente la verità risiede in una delle due ipotesi. Comunque lasciamo un margine di incertezza.

$$\mathbf{m}_{12} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{0.4286} \\ \cdot \\ \mathbf{0.4286} \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{0.1429} \end{bmatrix}$$

- **k = 2.6667. Inagaki's Rule :** In fine confermiamo la minima incertezza iniziale dei due esperti dando ovviamente maggiore credito alle loro ipotesi.

$$\mathbf{m}_{12} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{0.4688} \\ \cdot \\ \mathbf{0.4688} \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{0.0625} \end{bmatrix}$$

- **k = 2.9630. Extreme Rule :** Situazione estrema di filtraggio delle prove.

$$\mathbf{m}_{12} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{0.50} \\ \cdot \\ \mathbf{0.50} \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

- Per quanto riguarda il **passo di campionamento** di k è: **k_T = 0.00095**

Per quanto riguarda la **Distribuzione delle Rules** in funzione del passo di campionamento è possibile analizzarla in figura 3.26. Mentre, per quanto riguarda l'andamento della Belief e della Plausibility è possibile far riferimento alle figure 3.27,3.28 e ??.

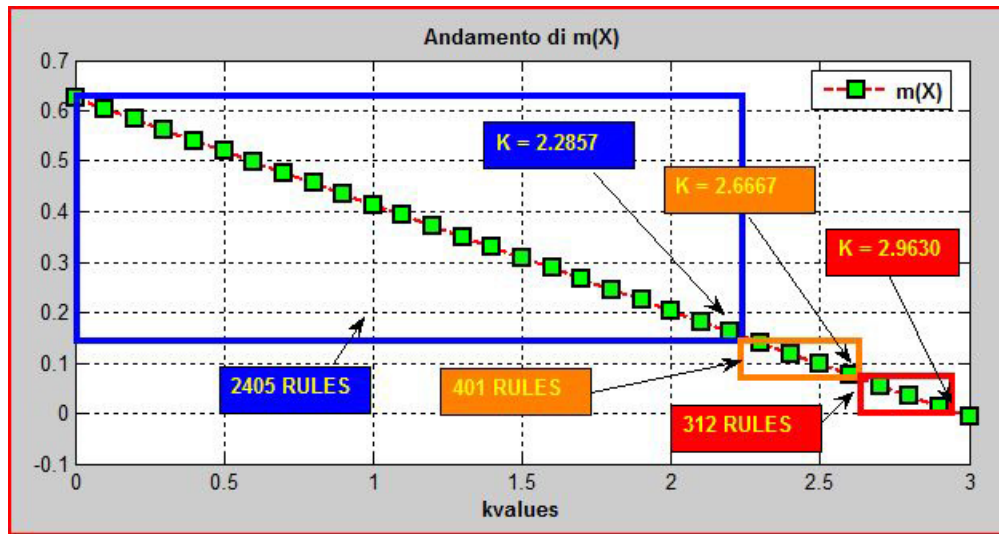


Figura 3.26: Rules Distributions 2

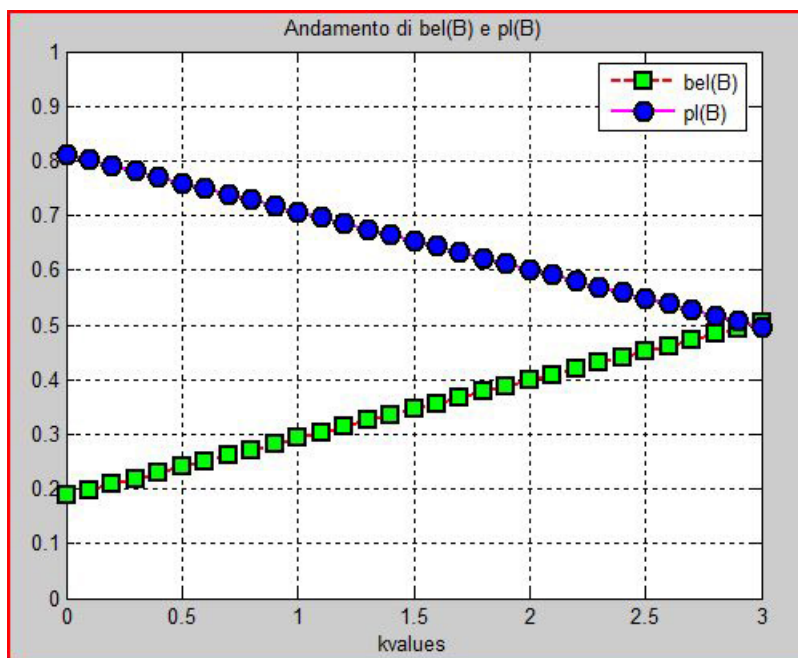


Figura 3.27: Belief and Plausibility- B

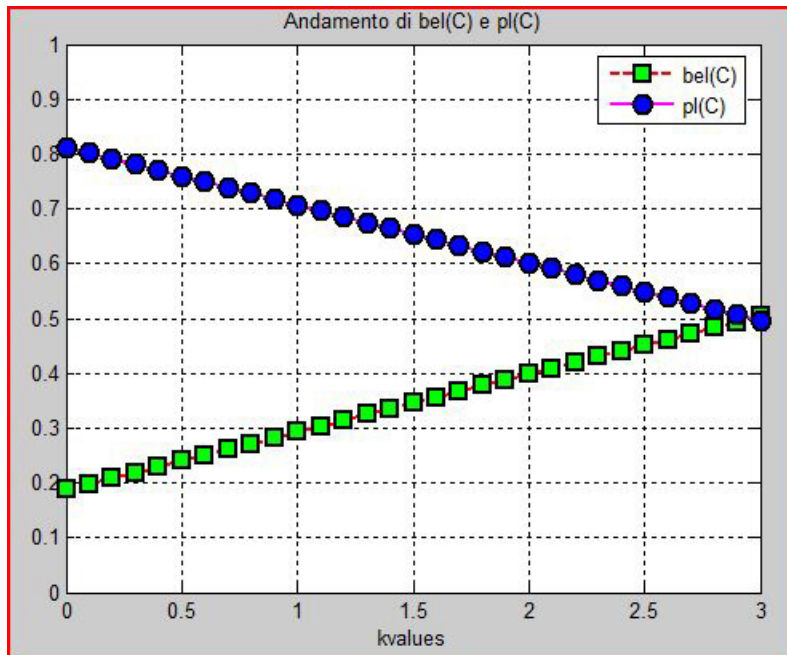


Figura 3.28: Belief and Plausibility- C

Example 3:

Consideriamo ora la situazione diametralmente opposta all'esempio precedente; in cui abbiamo la massa del Power Set più decentrata verso l'insieme Universale. Ovvero, i due esperti si trovano in alto mare e non riescono ad individuare il componente difettoso sebbene presentino un minimo sospetto su una delle Tre ipotesi possibili.

$$\mathbf{m}_1 = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{0.25} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{0.75} \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} \emptyset \\ A \\ B \\ AB \\ C \\ AC \\ BC \\ \cdot \\ ABC \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{m}_2 = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{0.25} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{0.75} \end{bmatrix} . \tag{3.56}$$

Il vettore della **masse non normalizzate (Smets)** ottenuto dalla fusione delle due Sorgenti attraverso la **Conjunctive Combination Rule** è:

$$\mathbf{m}_1 \oplus \mathbf{m}_2 = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \overbrace{0.0625}^{m_{12}} \\ \cdot \\ 0.1875 \\ \cdot \\ 0.1875 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0.5625 \end{bmatrix} \tag{3.57}$$

E' interessante osservare che rispetto alla situazione precedente abbiamo scambiato il valore delle masse del Null Set con quello di X. Questo risultato è la diretta conseguenza di aver invertito le percentuali relative ai due insiemi per i corrispondenti esperti.

- **k = 0. Yager's Rule:** Analogamente al caso precedente otteniamo lo stesso vettore delle masse, ma con un'interpretazione differente. Infatti, nell'esempio di prima la scelta era basata sul sospetto che qualcosa non andasse bene per i pareri discordanti dei due esperti (Quindi era più un pregiudizio soggettivo legato all'alta presenza di conflitto). In questo caso, la scelta potrebbe essere legata invece alla reale incertezza presentata dalle due sorgenti equindi si preferisce attendere ulteriori analisi o informazioni (in questo caso alta Ignoranza).

$$\mathbf{m}_{12} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{0.1875} \\ \cdot \\ \mathbf{0.1875} \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{0.6250} \end{bmatrix}$$

- **k = 1.0667. Dempster's Rule :** E' interessante notare che il valore della costante si è dimezzato rispetto all'esempio 2, questo è legato alla diminuzione del conflitto ed all'aumento dell'incertezza che si riflette sul valore delle altre costanti. In particolare questa situazione si legge implicitamente dal valore delle masse normalizzate, dove osserviamo che risulta dimezzato per le due ipotesi a favore di un'aumento considerevole della massa dell'insieme Universale.

$$\mathbf{m}_{12} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{0.2} \\ \cdot \\ \mathbf{0.2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{0.6} \end{bmatrix}$$

- **k = 2.6667. Inagaki's Rule :** Rispetto al valore delle masse normalizzate ottenute in corrispondenza di Dempster non abbiamo una grande variazione percentuale, in quanto la quantità di conflitto presente nel sistema non è significativa e quindi altrettanto è la percentuale di $\mathbf{m}(\emptyset)$ dell'insieme Universale da ridistribuire agli altri focal elements.

$$\mathbf{m}_{12} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{0.2188} \\ \cdot \\ \mathbf{0.2188} \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{0.5625} \end{bmatrix}$$

- **k = 2.9630. Extreme Rule :** Situazione estrema di filtraggio delle prove, dove però rispetto all'esempio 2 notiamo una notevole variazione percentuale del valore delle masse dei focal elements dovuta ovviamente

dalla presenza di un alto grado di ignoranza nel sistema che desideriamo filtrare.

$$\mathbf{m}_{12} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{0.50} \\ \cdot \\ \mathbf{0.50} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Per quanto riguarda il **passo di campionamento** di k è: $k_T = \mathbf{0.0085}$

Riportiamo di seguito la semplice procedura per il calcolo del numero delle regole.

1. **Calcolo del Numero totale delle Regole:** Il metodo consiste ovviamente nel calcolare preliminarmente il valore idoneo del passo di campionamento per k , il quale ci consente di discretizzare l'asse del parametro k . Successivamente si calcolano il numero complessivo di campioni e quindi di regole racchiuse nel range operativo del parametro.

$$\mathbf{R}_{\text{Tot}} = \frac{k_S}{k_T} = \frac{26.6667}{0.0085} = \mathbf{3137 \text{ Rules}}$$

2. **Calcolo del Numero di Regole per i Rispettivi Gap:** Il calcolo si ottiene considerando ovviamente delle proporzioni corrispondenti ai valori delle varie costanti di normalizzazione.

- **Conflict-Gap:** $[0 \quad k_D]$

$$\underbrace{\mathbf{R}_{\text{Tot}}}_{3137} : \underbrace{k_S}_{26.6667} = \mathbf{R_D} : \underbrace{k_D}_{1.0667} = \mathbf{125 \text{ Rules.}}$$

- **Conflict-Uncertainty-Gap:** $[k_D \quad k_I] \rightarrow \mathbf{189} = 314 - 125$

$$\underbrace{\mathbf{R}_{\text{Tot}}}_{3137} : \underbrace{k_S}_{26.6667} = \mathbf{R_I} : \underbrace{k_I}_{2.6667} = \mathbf{314 \text{ Rules}}$$

- **Uncertainty-Gap:** $[k_I \quad k_S] \rightarrow \underbrace{\mathbf{2823 \text{ Rules}}}_{k_S} = 3137 - 314$

L'andamento corrispondente alla distribuzione delle regole e delle rispettive Plausibility e Belief è riportato di seguito.

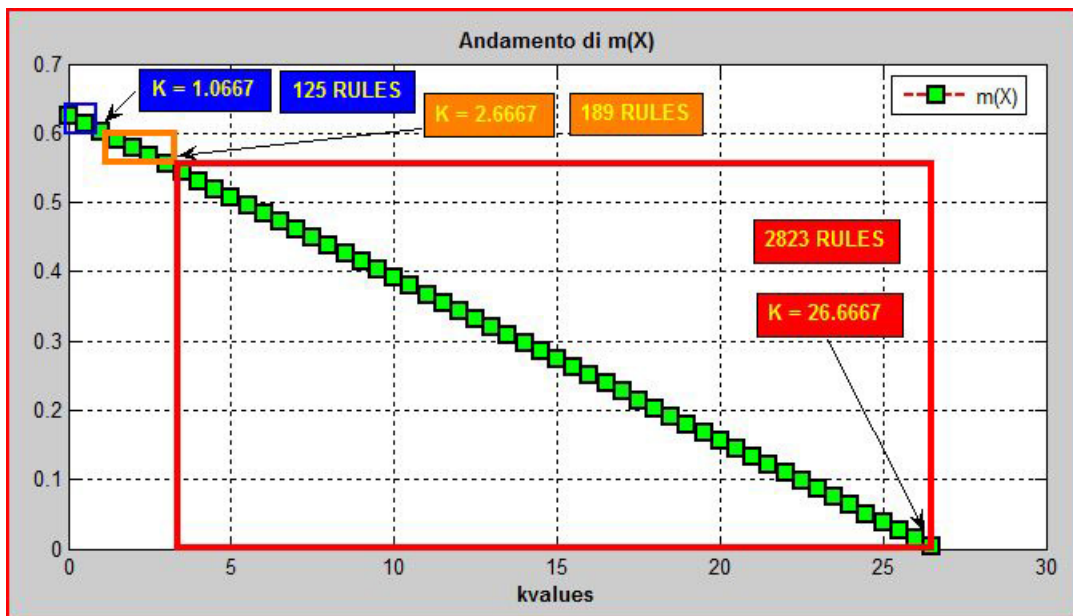


Figura 3.29: Rules Distributions 3

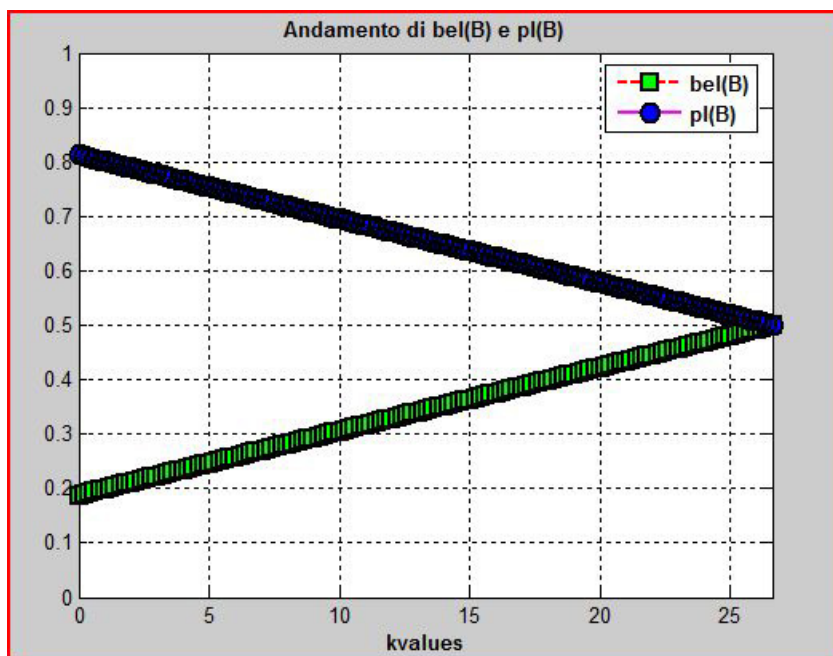


Figura 3.30: es-3 Belief and Plausibility- B

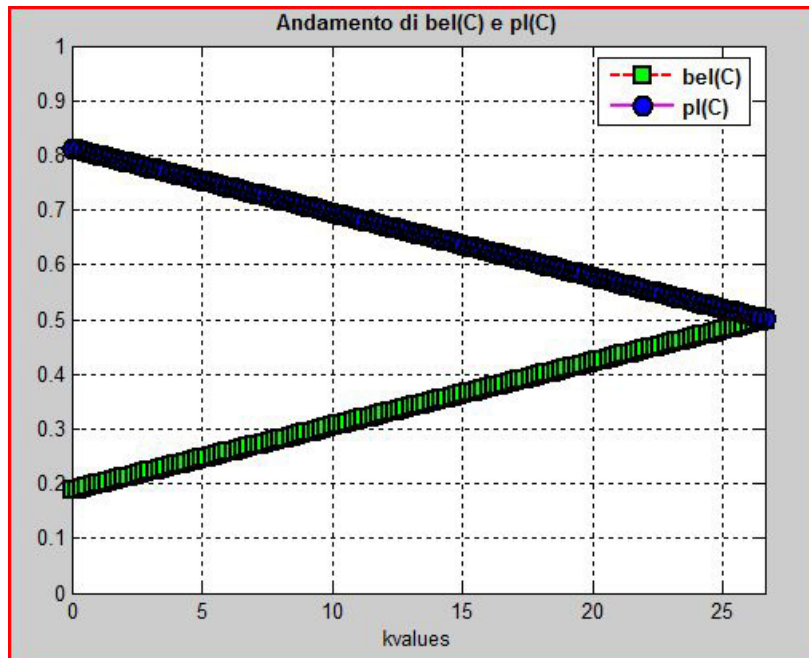


Figura 3.31: es-3 Belief and Plausibility- C

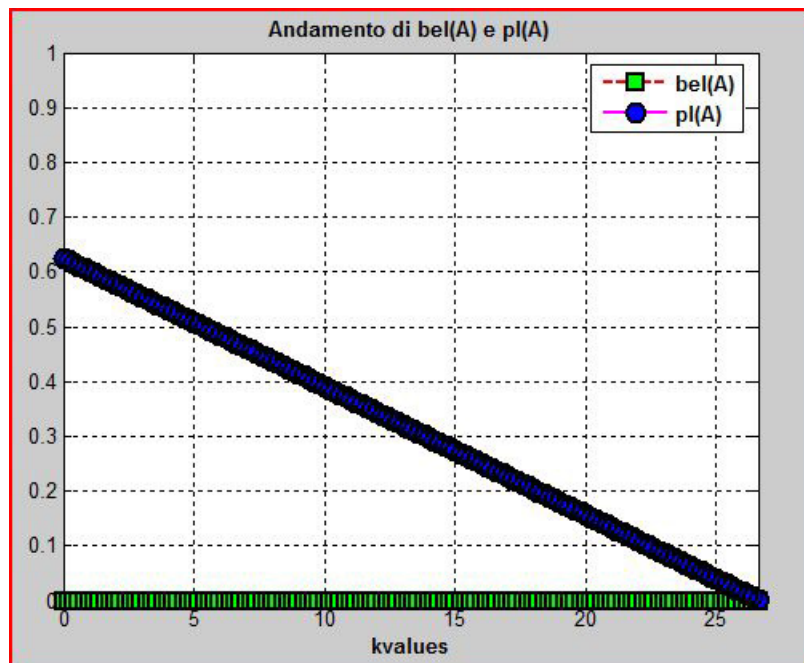


Figura 3.32: es-3 Belief and Plausibility- A

3.2.3 Esempi di Distribuzioni Eterogene

In questa parte considereremo delle distribuzioni che mettono in gioco tutte le ipotesi del Power Set, mettendo in luce come il valore delle costanti dipendano dalla presenza del Conflitto e dell'Ignoranza all'interno del Sistema. In particolare valuteremo come i diversi intervalli dipendano direttamente da questi stati. Infatti, a differenza degli esempi precedentemente analizzati, dove all'inizio del capitolo avevamo valutato la situazione di (**Minimo-Accordo e Massimo-Conflitto**) e successivamente (**Ignoranza-Conflitto**), ora studieremo il caso di (**Accordo-Ignoranza-Conflitto**) mettendo in evidenza, come al variare di uno degli stati possa cambiare notevolmente la situazione e soprattutto come tale situazione si riflette sui diversi interval-gaps.

Example 1: Consideriamo una situazione governata da un **50%** di Incertezza e la restante percentuale divisa tra due ipotesi, di cui una discordante dall'altra sorgente.

$$\mathbf{m}_1 = \begin{bmatrix} \cdot \\ \mathbf{0.25} \\ \mathbf{0.25} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{0.50} \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} \emptyset \\ A \\ B \\ AB \\ C \\ AC \\ BC \\ ABC \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{m}_2 = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{0.25} \\ \cdot \\ \mathbf{0.25} \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{0.50} \end{bmatrix}. \quad (3.58)$$

Il vettore della **masse non normalizzate (Smets)** ottenuto dalla fusione delle due Sorgenti attraverso la **Conjunctive Combination Rule** è:

$$\mathbf{m}_1 \oplus \mathbf{m}_2 = \begin{bmatrix} \overbrace{0.1875}^{m_{12}} \\ 0.1250 \\ 0.3125 \\ \cdot \\ 0.1250 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0.25 \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

E' interessante osservare che la fusione delle due sorgenti ha dato luogo ad un vettore non normalizzato in cui si è ridotto il valore dell'Incertezza iniziale relativa ai due esperti, grazie alla condivisione dell'ipotesi **B**. Tuttavia è presente un pò di conflitto dato dai pareri discordanti corrispondenti all'ipotesi **A-(Sorgente 1)** e dall'ipotesi **C-(Sorgente 2)**. In particolare è interessante notare che la quantità di conflitto ottenuta è frutto di due percentuali uguali per le due ipotesi contrastanti che risultano identiche a quella concordante. Questo risultato va interpretato come la possibilità che la verità si possa celare non solo ovviamente nell'ipotesi concordante **B** ma o in **A** oppure in **C**.E questo si legge dalla seguente relazione:

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_{12}(\mathbf{B}) &= m_{12}(C) + \mathbf{m}_{12}(\emptyset) \\ &= m_{12}(A) + \mathbf{m}_{12}(\emptyset) \end{aligned}$$

Quindi questo è il dilemma da risolvere in questo specifico problema relativo alla configurazione della bba ottenuta. Vediamo quindi cosa significa Filtrare il corpo delle prove in questa circostanza.

- **k = 0. Yager's Rule:** Siamo abbastanza diffidenti delle ipotesi discordanti dei due esperti e quindi preferiamo attendere ulteriori informazioni o pareri, prima di esprimere un giudizio sull'ipotesi **A** e **C**. Pertanto rimettiamo tutta la massa del Null Set nell'Incertezza dell'insieme Universale.

$$\mathbf{m}_{12} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \mathbf{0.1250} \\ \mathbf{0.3125} \\ \cdot \\ \mathbf{0.1250} \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{0.4375} \end{bmatrix}$$

- **k = 1.2308. Dempster's Rule :** Nutriamo ancora un pò di diffidenza nei confronti dei due esperti; tuttaavia la nostra diffidenza non è totale e redistribuiamo proporzionalmente il conflitto tra l'incertezza, l'ipotesi comune e le due ipotesi discordanti in funzione del valore delle loro masse non normalizzate. Diciamo che è una situazione di diffidenza intermedia e quindi un pò meno conservativa sulla redistribuzione di $\mathbf{m}(\emptyset)$.

$$\mathbf{m}_{12} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \mathbf{0.1538} \\ \mathbf{0.3846} \\ \cdot \\ \mathbf{0.1538} \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{0.3077} \end{bmatrix}$$

- **k = 1.7778. Inagaki's Rule :** Questa situazione riflette invece una convinzione che sebbene l'ipotesi **A** e l'ipotesi **C** dei due esperti siano discordanti, le loro consulenze sono autorevoli e quindi non possiamo scartare nè l'una nè l'altra possibilità. In particolare confermiamo l'incertezza iniziale frutto della fusione delle due sorgenti, dando credito sia all'esperto 1 che all'esperto 2, 'accontentando tutti'. Quindi in qualche modo nutriamo una maggiore confidenza nei due esperti. In questo caso abbiamo completamente filtrato il conflitto a favore dell'ipotesi avanzate dai due esperti.

$$\mathbf{m}_{12} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \mathbf{0.1667} \\ \mathbf{0.4167} \\ \cdot \\ \mathbf{0.1667} \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{0.25} \end{bmatrix}$$

- **k = 4.1481. Extreme Rule :** In fine non lasciamo spazio all'incertezza e filtriamo completamente anche l'ignoranza redistribuendola proporzionalmente alle altre ipotesi. Questa potrebbe essere una situazione ragionevole, considerando che i due esperti hanno lasciato aperta la strada su tutte le ipotesi del Power Set e quindi non corriamo il rischio di tralasciare qualche possibilità. Naturalmente occorre valutare l'entità

delle masse delle rispettive ipotesi con Cautela.

$$\mathbf{m}_{12} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \mathbf{0.2222} \\ \mathbf{0.5556} \\ \cdot \\ \mathbf{0.2222} \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Per quanto riguarda il **passo di campionamento** di k è: $k_T = \mathbf{0.0043}$

1. **Calcolo del Numero totale delle Regole:**

$$\mathbf{R}_{\text{Tot}} = \frac{k_S}{k_T} = \frac{4.81481}{0.0043} = \mathbf{1119 \text{ Rules}}$$

2. **Calcolo del Numero di Regole per i Rispettivi Gap:** Il calcolo si ottiene considerando ovviamente delle proporzioni corrispondenti ai valori delle varie costanti di normalizzazione.

- **Conflict-Gap:** $[0 \quad k_D]$

$$\underbrace{\mathbf{R}_{\text{Tot}}}_{1119} : \underbrace{k_S}_{4.81481} = \mathbf{R_D} : \underbrace{k_D}_{1.2308} = \mathbf{286 \text{ Rules.}}$$

- **Conflict-Uncertainty-Gap:** $[k_D \quad k_I] \rightarrow \mathbf{127} = 413 - 286$

$$\underbrace{\mathbf{R}_{\text{Tot}}}_{1119} : \underbrace{k_S}_{4.81481} = \mathbf{R_I} : \underbrace{k_I}_{1.7778} = \mathbf{413 \text{ Rules}}$$

- **Uncertainty-Gap:** $[k_I \quad k_S] \rightarrow \overbrace{\mathbf{706 \text{ Rules}}}^{k_S} = 1119 - 413$

L'andamento corrispondente alla distribuzione delle regole e delle rispettive Plausibility e Belief è riportato di seguito.

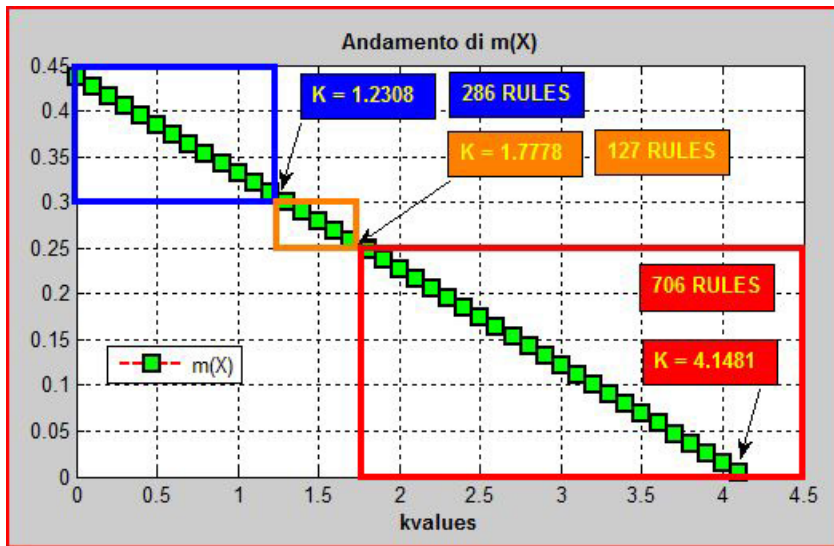


Figura 3.33: Rules Distributions 4

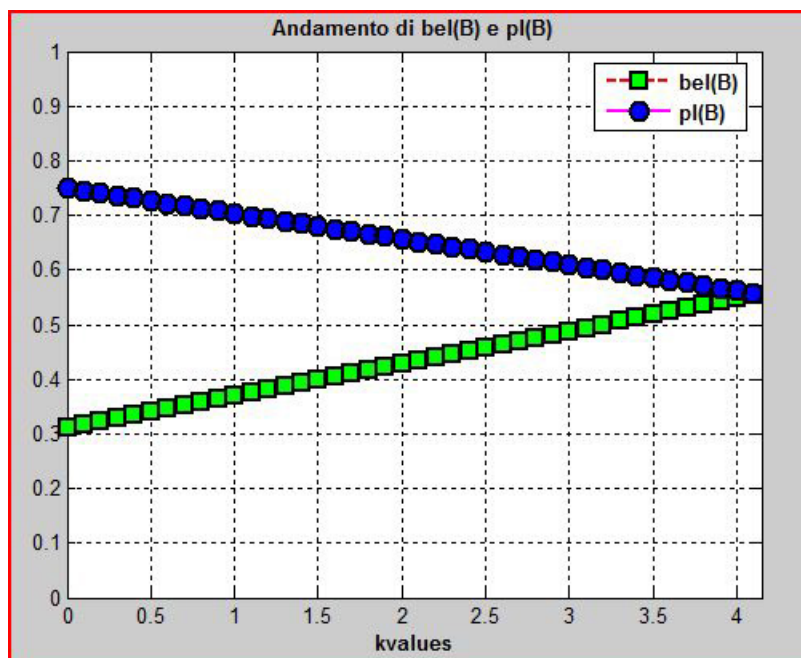


Figura 3.34: es-3 Belief and Plausibility- B

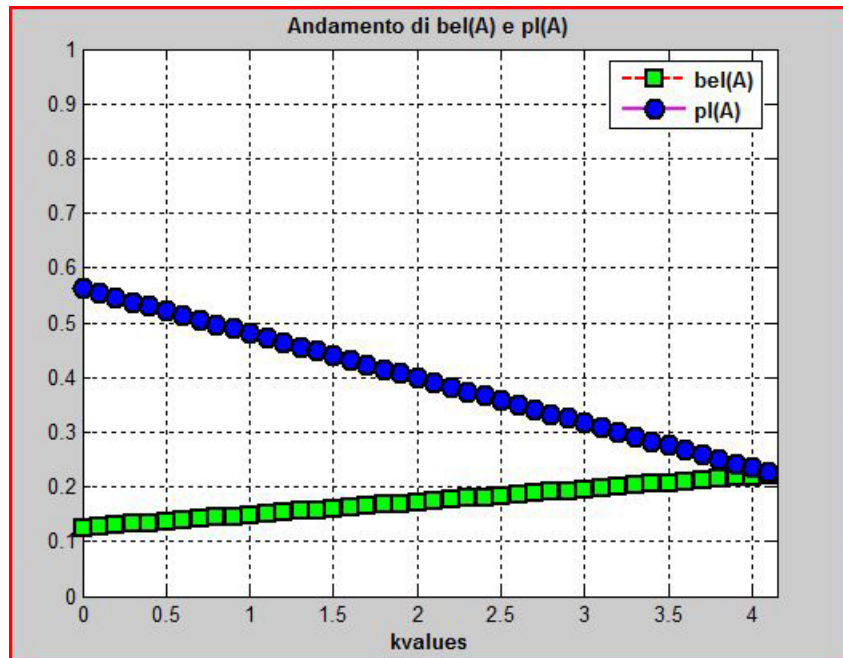


Figura 3.35: es-3 Belief and Plausibility- A

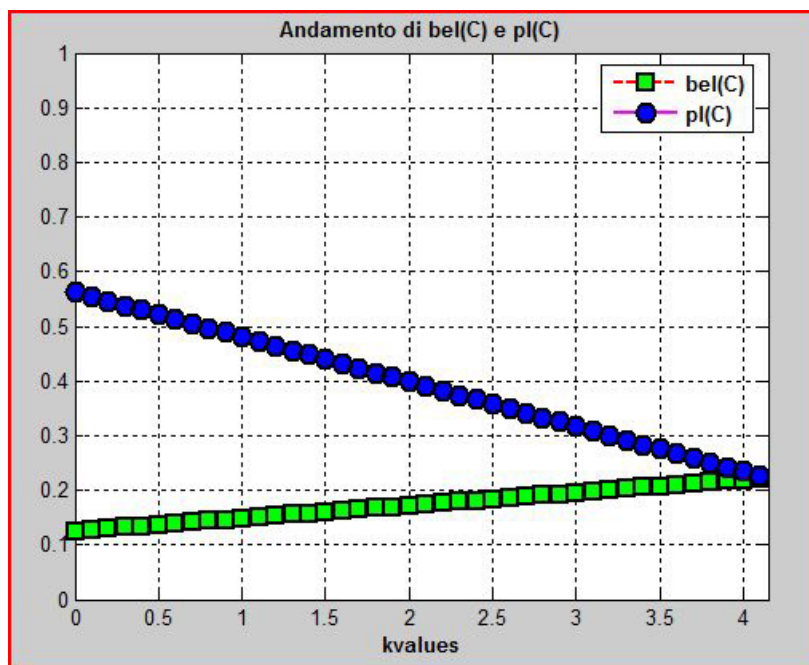


Figura 3.36: es-3 Belief and Plausibility- C

3.2.4 Linee Guida per la progettazione II

Da come si è potuto constatare dagli esempi precedenti, la scelta del parametro \mathbf{k} è influenzata direttamente dai valori delle masse degli insiemi del Power Set e quindi dalla bba structure risultante dall'operazione di combinazione delle informazioni tra le due sorgenti.

Nello specifico abbiamo visto come il suo range dipenda dalla quantità di conflitto e di incertezza presente nel sistema. Al fine di poter individuare la Regola più idonea in base alle nostre valutazioni soggettive delle bba structure delle sorgenti del sistema dobbiamo in generale considerare i seguenti **steps**:

1. Determinare, in base alle specifiche del problema, **Tolleranza della variazione percentulae** delle masse dei rispettivi insiemi del Power Set.
2. A partire dal vettore delle masse non Normalizzate, determinare la **Rapidità** con cui aumenta la **Vari-azione Percentuale** dei rispettivi focal elements diversi dall'insieme Universale. (Ovviamente la diminuzione della massa dell'insieme universale dipende dal valore delle altre masse). In sintesi il **coefficiente angolare del parametro \mathbf{k}** .
3. Determinare i valori delle costanti di Normalizzazione di riferimento:
 - **Dempster**
 - **Inagaki**
 - **Extreme-Rule**
4. Valutare empiricamente (in relata sarebbe preferibile trovare un'algoritmo) il **sampling-step-size of \mathbf{k}** \mathbf{k}_T , ovvero il **passo di campionamento del parametro \mathbf{k}** .
5. Determinare il **numero complessivo di Rules** e **classificarle** nei rispettivi intervalli individuati dalle costanti \mathbf{k} .
6. In fine, sulla scelta personale della strategia di controllo migliore per l'applicazione, **defniamo implicitamente il valore di \mathbf{k}** che ci consente di individuare la Regola idonea da implementare per il processo. E' chiaro che il valore di \mathbf{k} è un multiplo di \mathbf{k}_T .

NB: Va sottolineato che la procedura appena descritta dipende dalla particolare istanza del problema, pertanto dovremmo implementare una serie di CASE per ogni bba structure risultante dalla fusione delle sorgenti del sistema. E' chiaro che questa procedura oltre ad essere dispendiosa e difficilmente gestibile, richiede notevole memoria. Una possibile strada è quella di valutare dei Case generali che costituiscono dei framework per le possibili bba structure del problema che configurano delle situazioni di particolare interesse per il problema ed eventualmente per ogni istanza che si presenta, effettuare dei Matching per valutare quanto si allontana o meno dalla situazione tipo. Ovviamente questa scelta è abbastanza approssimativa.

Una differente soluzione che invece costituisce ancora un problemna aperto per molte applicazioni, è quello di impostare un **problema di ottimizzazione** per la scelta del parametro \mathbf{k} e che quindi sia di un livello più astratto, che consenta di definire una Funzione Obiettivo per il problema considerato.

Capitolo 4

Fusione Sensoriale della Robotica Autonoma Mobile nella DST

The magnitude of the probability of an argument depends upon a balance between what may be termed the favorable and the unfavorable evidence .

- John Maynard Keynes.

4.1 Introduzione

La Navigazione di una stazione Robot Mobile, basata sull'acquisizione di misure fornite da uno o più sensori, spesso richiede una buona rappresentazione dell'ambiente circostante. E' chiaro che l'unità robotica autonoma mobile deve essere in grado di costruire una mappa dell'ambiente affidandosi unicamente sulle sue informazioni sensoriali.

Al fine di realizzare la mappa dell'ambiente, queste informazioni sensoriali (provenienti da uno o più sensori montati a bordo del robot), devono essere combinate tra loro per ottenere la migliore percezione visiva virtuale dell'ambiente circostante (In sintesi il robot deve essere capace di muoversi liberamente nello spazio libero, semplicemente consultando la mappa memorizzata nella sua unità centrale). Tuttavia, tali informazioni (che intrinsecamente nascondono la Realtà che circonda il robot) nella maggior parte dei casi sono affette da incertezze e molto spesso risultano incomplete. Quindi uno dei principali problemi è quello di saper **filtrare in maniera opportuna i dati significativi** che consentano di avere un modello appropriato dell'ambiente.

I sensori che vengono maggiormente utilizzati nella Robotica Mobile, sono quelli ad **Ultrasuoni**. La loro versatilità è legata principalmente all'opportunità di ottenere delle soddisfacenti informazioni dell'ambiente ad un costo economico, basandosi sul principio del **TOF**(Time Of Flight). Questo ci offre la possibilità di costruire ed aggiornare la mappa del Robot per la **Localizzazione, Obstacle Avoidance** ed altri compiti da eseguire in fase di esplorazione di **un'ambiente non strutturato**.

Tuttavia, l'utilizzo dei sensori ad Ultrasuoni presenta anche delle controindicazioni che limitano il loro utilizzo. Uno dei principali problemi è legato al fenomeno delle *Specular Reflections*. Come è mostrato

in figura 4.1 le *specular Reflections* si presentano quando il raggio dell'Ultrasuono non torna direttamente al ricevitore, ma il suo cono di riflessione è orientato in una direzione che non copre direttamente il robot. **L'angolo d'incidenza** del segnale del Sonar ed i **materiali riflettenti** delle superfici sono i principali fattori scatenanti delle specular reflections. In particolare questo fenomeno è molto frequente quando il robot si muove in spazi angusti.

Uno dei principali effetti che nascono da tale fenomeno è legato alla distanza rilevata dal sensore, che risulta maggiore rispetto a quella effettiva. Queste letture errate provocate dalla Specular Reflection, possono essere gestite in ambito probabilistico come **incertezze** legate alla percezione dell'echo.

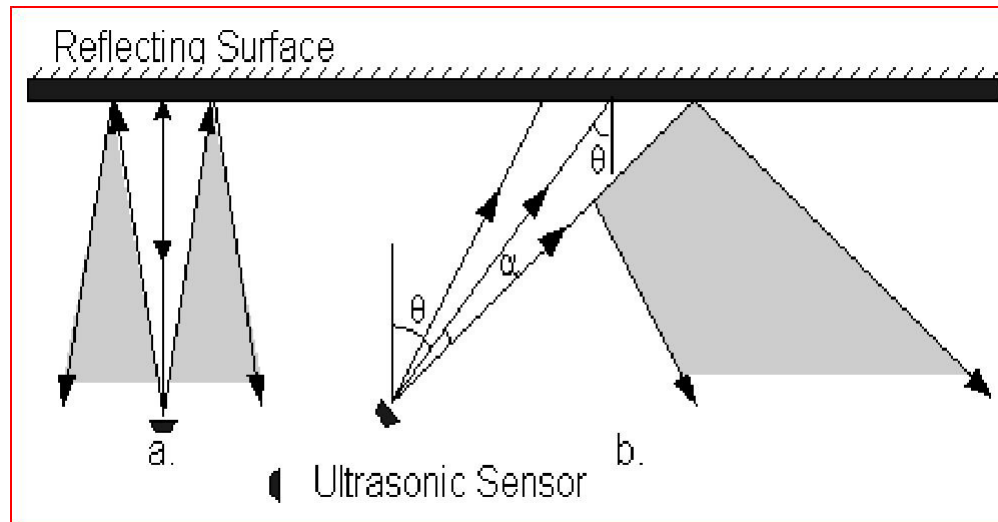


Figura 4.1: **Specular Reflection**

A differenza della classica teoria Probabilistica Bayesiana, in cui l'incertezza delle misure è correlata allo stato della cella occupata o vuota, quella di **Dempster-Shafer** è in grado di **distinguere** in modo chiaro il concetto di **Ignoranza e Contraddizione**, o utilizzando un termine equivalente **Conflitto**.

In questo lavoro viene proposto un metodo per utilizzare il **framework di DST**, facendo riferimento al modello **TBFM (Transferable Belief Function Model)** di Smets, per processare le prove fornite dalle sorgenti del sistema.

In particolare, rispetto ai classici articoli che ricorrono all'utilizzo di una o più regole all'interno del sistema, noi valuteremo il comportamento utilizzando la **Unified Combination Rule Model** proposto da **Toshiyuki Inagaki**; Mettendo in evidenza come la scelta di una regola (e quindi di un'unico valore di k) piuttosto che un'altra cambia notevolmente le prestazioni del sistema. Soprattutto cercheremo di comprendere quale tra il **continuum di Regole** nella **Conjunctive Combination Rule** risulta la più idonea per particolari situazioni.

4.2 Framework of Sensor Fusion

La **Evidence Grid** è un **Framework** che consente di integrare le informazioni di più sensori. Essa non è altro che una rappresentazione bidimensionale **2D** del mondo reale, modellata dal Robot Autonomo. E' possibile combinare le informazioni provenienti da una o più sorgenti del sistema, ricorrendo alla formula di Bayes, oppure alla Dempster's Rule of Combination. Risulta chiaro che in questo scenario, le sorgenti sono i sensori presenti

sul robot; i quali, sulla base di un proprio modello, codificano le varie acquisizioni nel rispettivo **framework** adottato per il Robot.

Attraverso l'algoritmo di fusione **Sensor Fusion Algorithm**, ad ogni cella che costituisce la **Evidence Grid** (La quale in sostanza è una scacchiera) viene assegnato un valore numerico che rappresenta il suo **stato** che può essere **Cella:{Occupata}** oppure **{Libera}**.

La teoria Bayesiana ha la grande limitazione di assegnare le probabilità unicamente ai **singletons**, ovvero ai singoli eventi. Nel nostro caso, per una singola cella che può risultare occupata oppure libera, le probabilità di queste due contraddizioni, devono soddisfare la **proprietà di Additività**, ovvero:

$$p(\{\mathbf{Occupied}\}) + p(\{\mathbf{empty}\}) = 1.$$

Questo significa che tale modello non consente la possibilità di gestire la presenza di **Ignoranza** nel corpo delle prove, in quanto siamo obbligati ad assegnare le probabilità ai singoli eventi in modo tale che la loro somma sia pari ad uno. Quindi il fatto di dire che la cella è occupata con una probabilità pari al 70% mi obbliga a dire che è vuota con una probabilità del 30%, senza contemplare la **plausibilità** che una cella sia occupata e libera.

Quindi uno dei principali vantaggi della **Dempster-Shafer's theory of evidence** rispetto all'approccio Bayesiano risiede proprio in questo aspetto; dato che è in grado di fornire prove sia per i singoli eventi **singletons** che per sottoinsiemi che modellano situazioni di incertezza, in modo da poter distinguere chiaramente il concetto di **Ignoranza-(Universal Set)** che di contraddizione o **conflitto-(Null Set)**.

4.2.1 Modello Evidence Grid nella DST

Nell'adottare la Dempster-Shafer's evidence Theory, possiamo considerare un sensore come una sorgente d'informazione che ci fornisce prove relative ad un'insieme di proposizioni d'interesse per la nostra realtà, che vengono denominate **focal elements**. L'insieme dei focal elements che possono essere osservati da un sensore è chiamato **frame of discernment(FOD)** indicato con θ . Nel nostro caso, il frame of discernment contiene **2 sole proposizioni**:

$$\theta = \{\mathbf{Occupied}, \mathbf{Empty}\}. \quad (4.1)$$

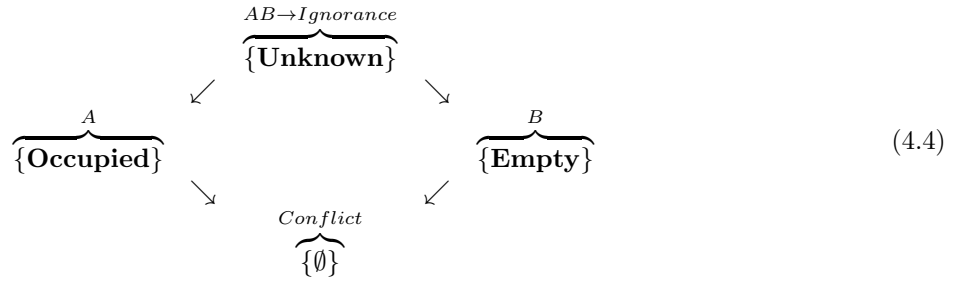
Possiamo trasferire la **Belief** di queste 2 proposizioni al **body of evidence**, ovvero al corpo delle prove attraverso una distribuzione di massa **basic belief assignment** per ciascun elemento del **Power Set** di θ , indicato con 2^θ .

$$2^\theta = \{\{\mathbf{Occupied}\}, \{\mathbf{Empty}\}, \{\mathbf{Unknown}\}\}. \quad (4.2)$$

Nell'equazione appena scritta risulta:

$$\{\mathbf{Unknown}\} = \{\mathbf{Occupied}\} \cup \{\mathbf{Empty}\}. \quad (4.3)$$

Il diagramma di Hasse che modella questo Reticolo è:



Le prove che giungono da una o più sorgenti vengono combinate tra loro in un corpo di prove complessivo che sintetizza l'insieme delle informazioni pervenute in una bba structure attraverso la Dempster's Rule of Combination. Nel nostro caso la nuova prova $\mathbf{m}_N(\mathbf{C})$, frutto dell'operazione di **Updating**, è ottenuta dalle due prove, \mathbf{m}_S dai sensori e \mathbf{m}_0 delle prove pre-esistenti (Old existing Evidence).

la bba $\mathbf{m}_N(\mathbf{C})$ prende il nome di **Orthogonal Sum** di \mathbf{m}_S e \mathbf{m}_0 e viene calcolata nel modo seguente:

$$\mathbf{m}_N(\mathbf{C}) = (m_S \oplus m_0)(C) = \frac{\sum_{A \cap B = C; C \neq \emptyset} m_S(A) \cdot m_0(B)}{1 - \sum_{A \cap B = \emptyset} m_S(A) \cdot m_0(B)} \tag{4.5}$$

Dove $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \subseteq \theta$. Ad esempio, dove $\mathbf{C} = \{\mathbf{Occupied}\}$, d'ora in avanti indichiamo per semplicità di notazione $\mathbf{occ} = \mathbf{Occupied}$ e con $\mathbf{emp} = \mathbf{Empty}$ ed in fine con $\mathbf{unk} = \mathbf{unknown}$, quindi si ha:

$$\overbrace{\mathbf{m}_n(\{\mathbf{occ}\})}^{\mathbf{A}_n} = \frac{\overbrace{m_0(\mathbf{occ})}^{\mathbf{A}_0} \cdot \overbrace{m_S(\mathbf{occ})}^{\mathbf{A}_S} + \overbrace{m_0(\mathbf{occ})}^{\mathbf{A}_0} \cdot \overbrace{m_S(\mathbf{unk})}^{\mathbf{AB}_S} + \overbrace{m_0(\mathbf{unk})}^{\mathbf{AB}_0} \cdot \overbrace{m_S(\mathbf{occ})}^{\mathbf{A}_S}}{1 - \underbrace{m_0(\mathbf{occ}) \cdot m_S(\mathbf{emp})}_{\mathbf{A}_0} - \underbrace{m_0(\mathbf{emp}) \cdot m_S(\mathbf{occ})}_{\mathbf{B}_S} - \underbrace{m_0(\mathbf{emp}) \cdot m_S(\mathbf{unk})}_{\mathbf{B}_0} - \underbrace{m_0(\mathbf{unk}) \cdot m_S(\mathbf{emp})}_{\mathbf{A}_S}} \tag{4.6}$$

4.2.2 Modello del Sensore

L'entità da attribuire al corpo delle prove è ottenuta codificando le risposte del raggio ultrasonico del sensore in modo da proiettarle sopra la Evidence Grid, utilizzando il modello adottato dal sensore.

Il modello impiegato per il sensore è una funzione che dipende dall'angolo e dal range operativo di lettura del **SoNaR (Sound-Navigation-Ranging)** stesso 4.2.

Quindi abbiamo una sezione circolare, in cui il modello converte le informazioni relative al range, nei corrispondenti valori di probabilità da attribuire ai nostri eventi che caratterizzano il **fod**. A partire dai parametri descritti nella figura 4.2, possiamo definire le equazioni che caratterizzano il modello e quindi la corrispondente **bba**:

$$\mathbf{Region\ I} \rightarrow \mathbf{R} - \epsilon < r < \mathbf{R} + \epsilon$$

$$\mathbf{m}(\{\mathbf{occupied}\}) = \frac{\left(\frac{\alpha - \omega^2}{\alpha}\right) + \left(\frac{\epsilon - |R - r|}{\epsilon}\right)^2}{2} \tag{4.7}$$

$$\mathbf{m}(\{\mathbf{empty}\}) = 0$$

$$\mathbf{m}(\{\mathbf{unknown}\}) = 1.00 - \mathbf{m}(\{\mathbf{occupied}\})$$

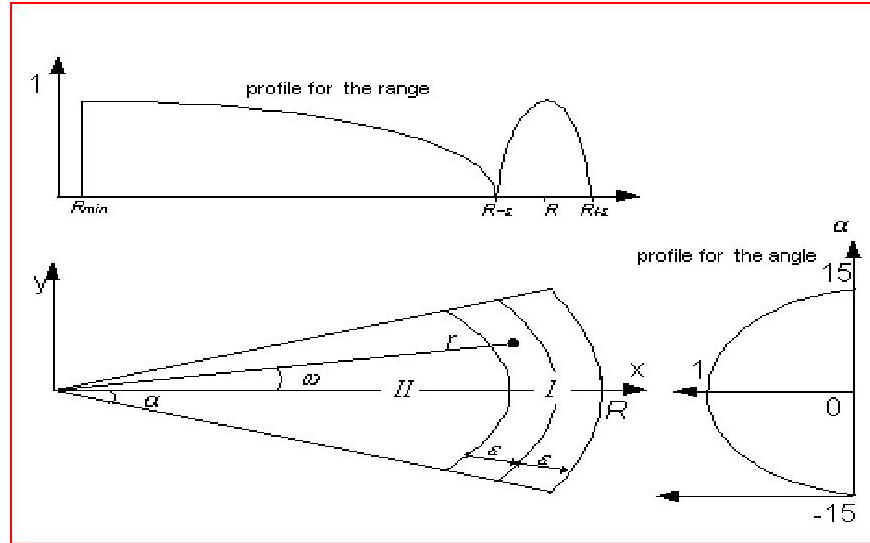


Figura 4.2: The profile of the ultrasonic sensor model

Region II $\rightarrow R_{\min} < r < R - \epsilon$

$$m(\{\text{occupied}\}) = 0$$

$$m(\{\text{empty}\}) = \frac{\left(\frac{\alpha - \omega}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{R - \epsilon - r}{R - \epsilon}\right)^2}{2} \quad (4.8)$$

$$m(\{\text{unknown}\}) = 1.00 - m(\{\text{empty}\})$$

- **R**: E' il range della risposta radiale del sensore ultrasonico.
- (r, ω) : sono le coordinate di un punto interno al cono d'azione del sonar.
- ϵ : E' il margine d'errore del range del sonar e caratterizza la distribuzione delle prove nella Regione I.
- α : E' metà dell'angolo del cono operativo del raggio del sonar.

4.2.3 Gestione delle Specular Reflections

Il modello matematico 4.7 e 4.8, adottato per il sensore ultrasonico per caratterizzare la bba corrispondente, risulta efficace per tradurre le informazioni corrispondenti al range operativo dello strumento di misura; Tuttavia tale modello risulta poco adatto o per lo meno non fornisce dei risultati accettabili, nel caso in cui sia presente il fenomeno delle specular reflections. Il quale si manifesta inevitabilmente in ambienti ristretti come ad esempio quelli indoor.

Al fine di poter mitigare la lettura di dati che non riflettono l'effettiva distanza di un'eventuale ostacolo presente lungo il raggio d'azione del sonar (legato all'effetto provocato dal fenomeno delle specular reflections) generalmente si adotta un particolare coefficiente di progetto denominato **Range Confidence Factor (RCF)**(costante di confidenza nel rilevare la distanza di un'ostacolo). Risulta evidente che tanto più l'**RCF** è alto, tanto più risulterà robusto il nostro apparato all'effetto delle specular reflections. Viceversa, se

esso risulta basso avremo un maggiore degrado delle prestazioni del sistema nel percepire l'echo di ritorno. Ovviamente la funzione che descrive l'andamento del RCF è decrescente e dipende dalla distanza a cui viene rilevato l'oggetto. Quindi, tanto più sarà elevata la distanza in corrispondenza della quale viene rilevata la presenza di un'oggetto, tanto più sarà minore il valore di RCF. A questo punto occorre definire il valore minimo che può assumere il nostro coefficiente di confidenza (RCF) e soprattutto quale è la soglia massima in corrispondenza della quale ottengo tale valore (che in sintesi costituisce l'insieme delle possibili distanze che posso rilevare con il mio strumento di misura). Quindi, il modello viene ulteriormente esteso tenendo in considerazione l'andamento dell' RCF all'aumentare della distanza. In primis esso dipende dalle specifiche del Datasheet del sensore ultrasonico utilizzato, ma vedremo intervengono anche altri fattori, tra cui quello più importante è τ .

$$\begin{aligned} \mathbf{R} > \mathbf{R}_{\max} \quad \mathbf{RCF} &= RCF_{\min} = \frac{R_{th}}{R_{th} + 1} \\ \mathbf{R} \leq \mathbf{R}_{\max} \quad \mathbf{RCF} &= \frac{\left(\frac{R_{\max} - R}{R_{\max}}\right)^{\tau} + R_{th}}{1 + R_{th}} \end{aligned} \quad (4.9)$$

- **R**: E' la risposta del Sonar.

- **RCF**:E' determinato da **3 parametri**:

1. τ : utilizzato per quantificare la sensibilità del sensore nel ricevere la potenza del segnale riflesso (ovvero dell'echo). Erroneamente si potrebbe pensare che questo parametro dipenda unicamente dalle specifiche del Datasheet del sensore, in realtà il suo valore deve essere accuratamente scelto dall'utente che desidera utilizzare lo strumento di misura, in quanto esso riflette intrinsecamente anche le caratteristiche dell'ambiente circostante. Ad esempio **lo spazio di manovra possibile** oppure le **proprietà di riflessione** delle superfici degli oggetti presenti nell'ambiente. Quindi sulla base di queste considerazioni, vengono attribuiti dei valori a τ che ovviamente determinano l'accuratezza del sensore e che quindi influenzano direttamente anche i valori della bba. Nella figura 4.3 si può constatare che per valori di $\tau < 1$, l'andamento del RCF in funzione della distanza diminuiscono molto più lentamente, rispetto all'andamento riportato nella figura 4.3 nella quale $\tau > 1$.

Quindi la sensibilità del nostro apparato, in corrispondenza di distanze che siano inferiori a \mathbf{R}_{\max} , risulterà minore per valori di $\tau < 1$ e pertanto avremo una maggiore accuratezza nella misura. \mathbf{RCF}_{\min} E' il più piccolo valore di RCF che dipende dalla soglia \mathbf{R}_{th} che viene definita in sede di progettazione e dipende dal tipo di applicazione.

2. \mathbf{R}_{\max} imposta la massima distanza che può rilevare il sonar; ad esempio \mathbf{R}_{\max} può essere selezionato considerando la lunghezza della diagonale maggiore del nostro ambiente. Come è mostrato nella Figura 4.3 RCF raggiunge il valore minimo \mathbf{RCF}_{\min} (ovvero il valore in corrispondenza del quale abbiamo la peggiore risposta e quindi la più alta sensibilità all'effetto delle specular reflections) quando ovviamente la distanza rilevata è pari esattamente a \mathbf{R}_{\max} .

Quindi, le risposte corrotte dalle **specular reflections** danno luogo ad un corpo di prove più esiguo che consente di evitare di accrescere inutilmente la massa delle bba, in seguito ad informazioni non attendibili legate

al fenomeno citato. E' chiaro quindi che l'RCF è un fattore di penalizzazione che interviene nel modello proposto inizialmente 4.7.

$$\begin{aligned} m(\{\text{occupied}\}) &= \mathbf{RCF} \times \frac{\left(\frac{\alpha-\omega}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\epsilon-|R-r|}{\epsilon}\right)^2}{2} \\ m(\{\text{empty}\}) &= \mathbf{RCF} \times \frac{\left(\frac{\alpha-\omega}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{R-\epsilon-r}{R-\epsilon}\right)^2}{2} \end{aligned} \quad (4.10)$$

Quindi l'RCF è effettivamente una costante che ha la funzione di filtro, che modifica il valore da assegnare alle prove delle celle; esso dipende da tre parametri τ , \mathbf{R}_{th} , \mathbf{R}_{max} . Tali valori vengono scelti sulla base di considerazioni euristiche del modello dell'ambiente o da risultati sperimentali. E' evidente che per $\mathbf{RCF} \rightarrow 1$ abbiamo una situazione ideale in cui il nostro sistema non risente del fenomeno delle specular reflections, mentre per $\mathbf{RCF} \rightarrow 0$ tale fenomeno incomincia ad essere significativo e quindi occorre **filtrare opportunamente le prove fornite dal sensore**.

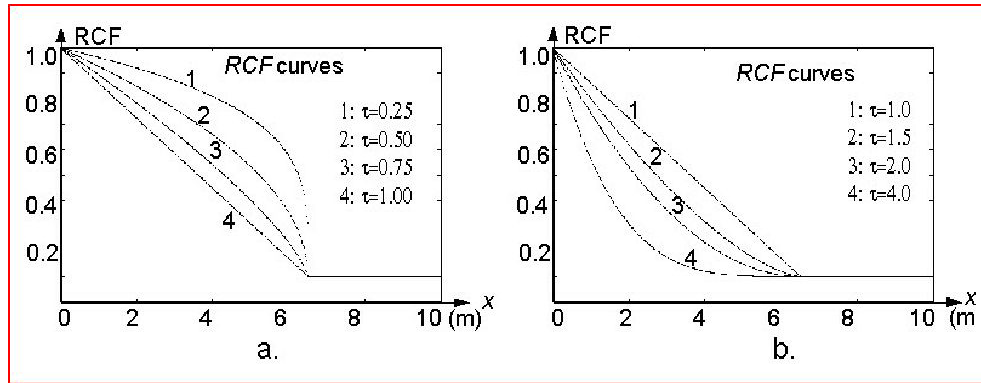


Figura 4.3: The Range Confidence Factor $\mathbf{R}_{max}=6.5$ m

4.3 Simulazioni e Risultati

In questa parte analizzeremo come la scelta di una Regola possa influenzare notevolmente le prestazioni del nostro sistema. Nello specifico, considereremo la situazione in cui le misure provengono da un'unico sensore che rileva la possibilità che la cella presente davanti al Robot risulti occupata o meno.

E' evidente che la scelta di un valore di \mathbf{k} piuttosto che un'altro, nella dinamica che governa la fase di **Updating** della bba structure, corrispondente allo Stato Corrente, possa incidere sulla **velocità di convergenza** del sistema alla **bba structure effettiva** che rispecchia le misure del Sensore. In particolare valuteremo due possibili scenari con differenti condizioni iniziali, relative allo stato corrente del Robot ed alla nuova acquisizione del Sensore.

Nello specifico mostreremo come a seconda della **condizione iniziale** per un dato **scenario**, la scelta di un'opportuna regola possa notevolmente influire sulla fase di **Updating**. Per semplicità considereremo un **Updating-Statico**, ovvero utilizzeremo sempre la medesima regola per ogni nuova acquisizione; Tralasciando la possibilità di effettuare il **Tuning** del parametro \mathbf{k} in tempo Reale.

Il confronto verrà effettuato sulle seguenti **3 Regole**:

1. **Yager's Rule of Combination.**
2. **Dempster's Rule of Combination.**
3. **Inagaki's Rule of Combination.**

Vorrei inoltre sottolineare come, grazie alla possibilità di poter definire implicitamente il parametro k attraverso le specifiche di filtraggio sia possibile valutare situazioni intermedie tra le Regole che interpolano ed estrapolano la Regola di Dempster. Inoltre vedremo come una scelta errata del parametro k possa portare a delle situazioni di instabilità numerica. Ovviamente per valutare la bontà di una soluzione rispetto ad un'altra occorre osservare come la scelta di filtrare le prove influenzi l'andamento del conflitto e dell'ignoranza presente nel sistema.

Naturalmente le nostre considerazioni vengono comunque valutate sulla base dell'affidabilità delle prove fornite dal sensore. In altre parole l'acquisizione finale del sensore rispecchia lo Stato reale del sistema. Quindi tanto più la mia bba structure risulterà coerente con i dati forniti dal sensore, maggiore sarà l'affidabilità della scelta effettuata per il parametro k . Comunque uno dei requisiti fondamentali è che la scelta specifica del valore di k mi consenta di raggiungere lo stato finale desiderato e soprattutto che lo raggiunga il prima possibile. Nei semplici esempi che considereremo, la dinamica del processo può essere paragonata effettivamente ad un problema di regolazione, nel quale mostreremo un'aspetto particolarmente interessante che va oltre la semplice evidenza. Infatti mostreremo come l'algoritmo di fusione stimi il valore finale dello stato del sistema, prima che effettivamente il sensore abbia fornito il valore finale. In un certo senso possiamo quindi classificarlo come un'algoritmo predittivo. Pertanto esso va oltre la semplice acquisizione del sensore e consente di fare delle valutazioni a priori sulla scelta della migliore legge di controllo da applicare sul processo. Comunque al di là di queste considerazioni generali che verranno riprese successivamente, passiamo direttamente allo studio degli scenari.

4.3.1 Case Study

Come possibile scenario consideriamo la situazione in cui il Robot è stato appena attivato ed inizia ad effettuare delle misure relative alla possibilità che una data cella che si trova ad una determinata distanza sia occupata o meno. Supponiamo che la cella sia effettivamente occupata da un'oggetto e che il Robot avvicinandosi lentamente verso tale posizione ottenga delle misure sempre più precise che riducono l'incertezza iniziale, fino a giungere alla conclusione definitiva che lungo il suo tragitto (in corrispondenza di tale cella) è presente un'ostacolo.

Di seguito considereremo **5 differenti stati iniziali** relativi allo **Stato corrente del Robot**:

1. **Totale Ignoranza**
2. **Massima Contradizione**
3. **Minima Contradizione**
4. **Distribuzione Uniforme**

Per quanto riguarda la serie storica delle acquisizioni del sensore sarà sempre la stessa. In particolare si è desiderato di utilizzare un'andamento sinusoidale per la massa corrispondente allo stato di cella occupata. I

rispettivi grafici relativi all'andamento della $\text{bba}(\mathbf{A})$ 4.4 e della $\text{bba}(\mathbf{X})$ 4.5 e delle corrispondenti **Belief** e **Plausibility** delle due proposizioni **A** 4.6 e **B** 4.7 sono riportati di seguito. Naturalmente per il significato delle lettere rimando alla lettura dei capitoli precedenti.

Nello specifico notiamo che nella serie storica delle acquisizioni del sensore che si avvicina alla cella considerata; aumenta la **Belief** della proposizione **A=Cella Occupata** e diminuisce la **Plausibility** della proposizione **B = Cella Libera**.

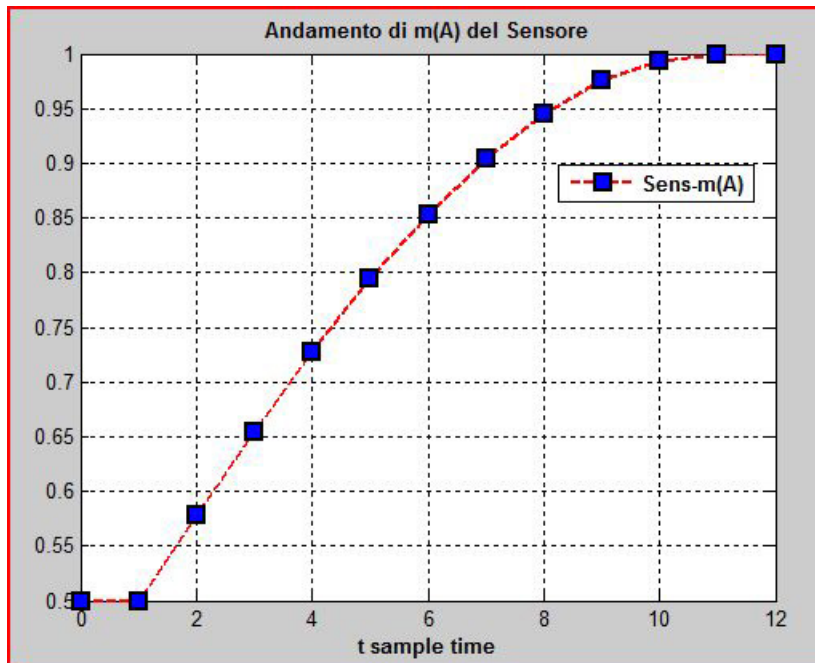


Figura 4.4: Sensor Data Acquisition $m(\mathbf{A})$

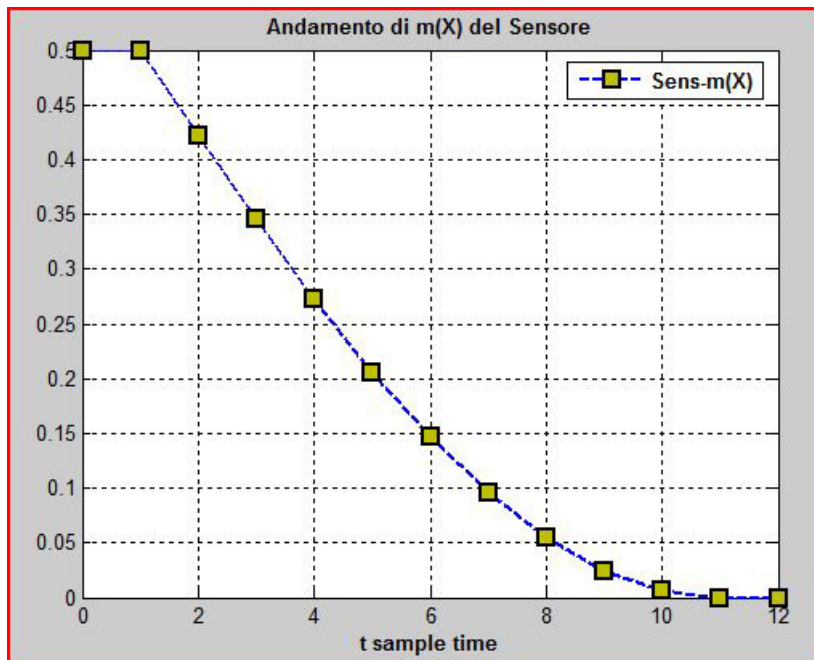


Figura 4.5: Sensor Data Acquisition m(X)

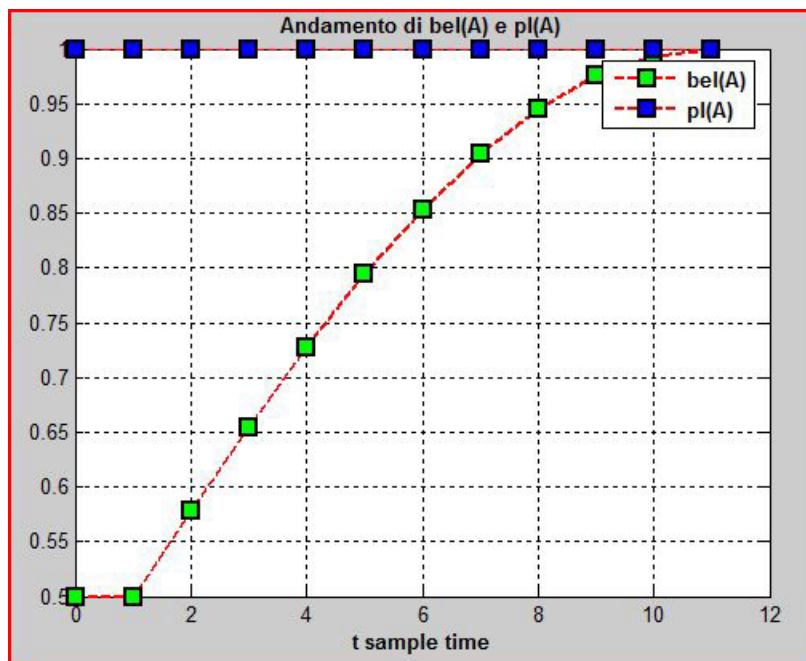


Figura 4.6: Sensor belief(A) vs pl(A)

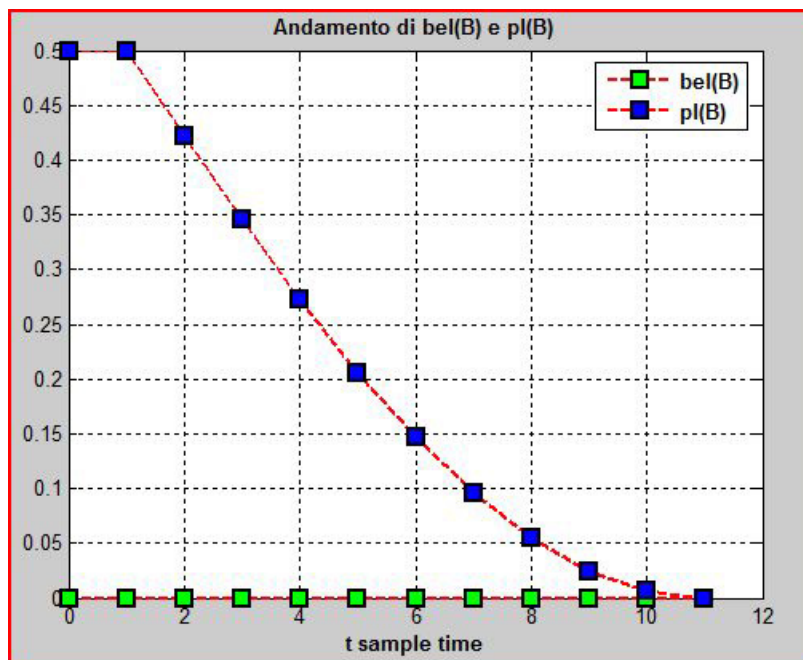


Figura 4.7: Sensor belief(B) vs pl(B)

4.3.2 Totale Ignoranza

Supponiamo che inizialmente il Robot non abbia a disposizione informazioni relative allo stato della cella e che quindi si trovi in una situazione di **Completa Ignoranza**. Possiamo modellare tale situazione con una **vacuous belief structure**. Ora analizzeremo l'applicazione delle differenti regole a partire dallo stato iniziale:

$$\mathbf{m}_0 = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix}$$

Yager's Rule of Combination $k = 0$

Vediamo come la scelta di confinare l'eventuale presenza di conflitto all'interno del sistema, nell'insieme universale possa incidere su questo scenario in cui abbiamo considerato uno stato iniziale di Totale Ignoranza.

Nei grafici 4.8 e 4.9 viene riportato l'andamento dei valori di $\mathbf{m}(\emptyset)$ e $\mathbf{m}(\mathbf{X})$ che rappresentano rispettivamente la massa del Null Set e dell' Universal Set, i quali rispecchiano lo stato di conflitto ed Ignoranza presente nell'evoluzione del Processo in cui ho deciso di adottare la regola di Yager. In particolare, dall'analisi dei valori di queste masse non normalizzate notiamo che la dinamica del processo è governata da un grande stato d'incertezza iniziale; Comunque questo aspetto non influisce particolarmente sull'evoluzione del sistema verso lo stato finale, in quanto la presenza di conflitto è inesistente vedi 4.9. Quindi l'eventuale ripartizione di $\mathbf{m}(\emptyset)$ tra i focal elements del Power Set non gioca un ruolo determinante.

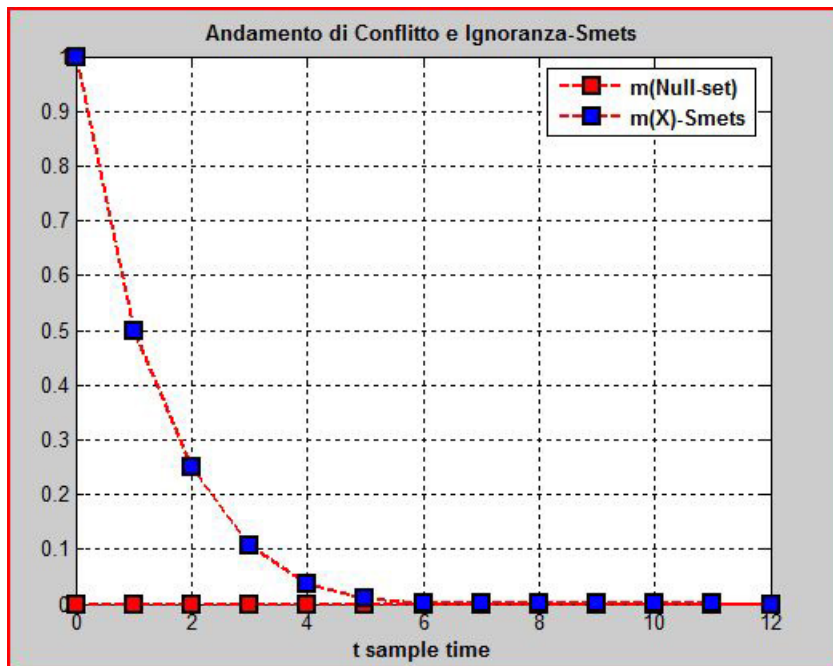


Figura 4.8: Conflict-vs-Ignorance

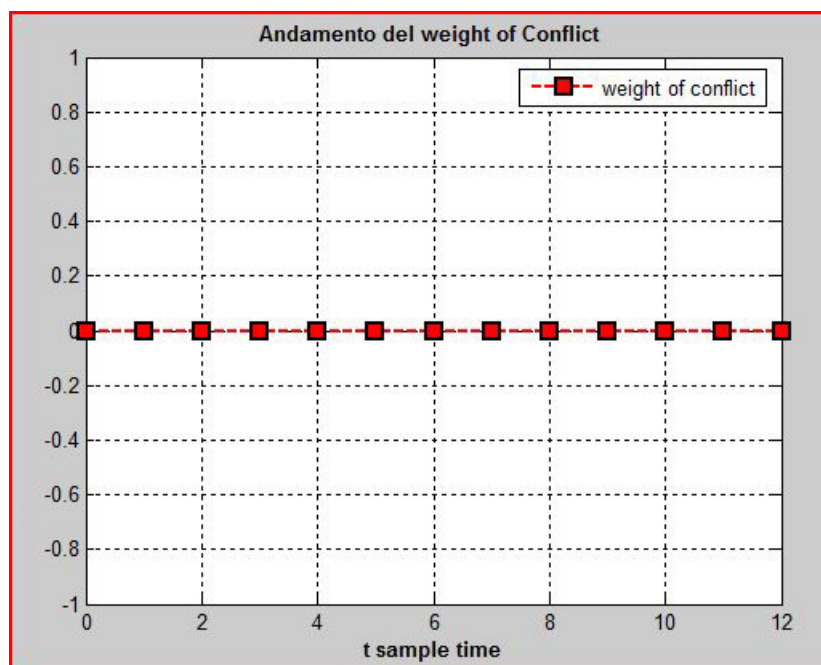


Figura 4.9: Weight of Conflict

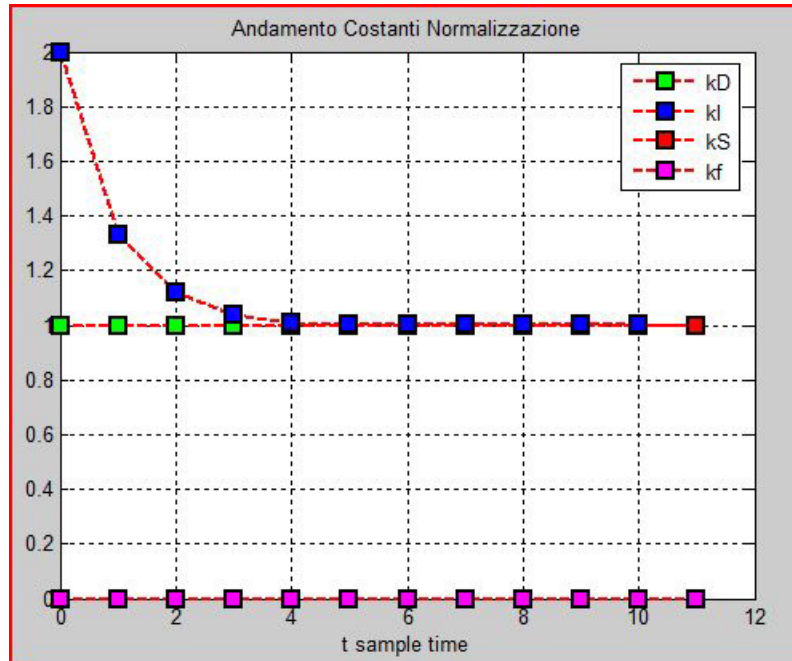


Figura 4.10: Normalization k dynamic

Conseguenza diretta di questi aspetti è ravvisabile dall'andamento dei valori delle costanti di Normalizzazione vedi 4.10. Infatti è possibile notare che la \mathbf{K}_D Dempster's Rule of Combination assume sempre valore unitario, mentre il gap tra \mathbf{k}_D e \mathbf{k}_I Inagaki's Rule è inizialmente molto alto, fino in definitiva ad annullarsi verso gli ultimi campioni.

L'interpretazione di questi dati è legata essenzialmente a:

- L'espressione analitica del **weight of conflict**

$$\text{weight of Conflict} = -\log(\mathbf{K}) \quad \text{wc} \rightarrow 0 \text{ per } k \rightarrow 1$$

- Il divario iniziale tra \mathbf{k}_D e \mathbf{k}_I è legato essenzialmente al peso della massa $\mathbf{m}(\mathbf{X})$ che rispecchia la totale ignoranza iniziale che va sempre più diminuendo verso la fine $\mathbf{k}_D = \mathbf{k}_I$.

Il valore di \mathbf{k}_f è la scelta della costante di normalizzazione ad ogni step di aggiornamento. Nel nostro caso si è scelto di filtrare le prove utilizzando $\mathbf{k}_f = \mathbf{0}$, ovvero utilizzando la Regola di Yager.

E' interessante notare dai grafici 4.11 e 4.12 come la belief della proposizione \mathbf{A} (ovvero la credibilità che la cella sia occupata) relativa allo stato aggiornato del sistema (indicato con $\text{bel}(\mathbf{A})\text{-k}$) converga ad 1 molto più velocemente rispetto alle acquisizioni del sensore $\text{bel}(\mathbf{A})\text{-S}$. Analogo discorso viene fatto per la plausibilità della proposizione \mathbf{B} (ovvero la plausibilità che la cella si vuota), dove converge a zero molto più velocemente di quella del sensore. In sintesi abbiamo una capacità **predittiva** da parte del nostro algoritmo di fusione-normalizzazione che ci consente di fare una stima a priori dello stato finale del sistema. Per comprendere la corrispondenza esistente tra l'andamento della Belief e Plausibility dei rispettivi singletons e delle bba degli insiemi del Power Set osserviamo la figura 4.13.

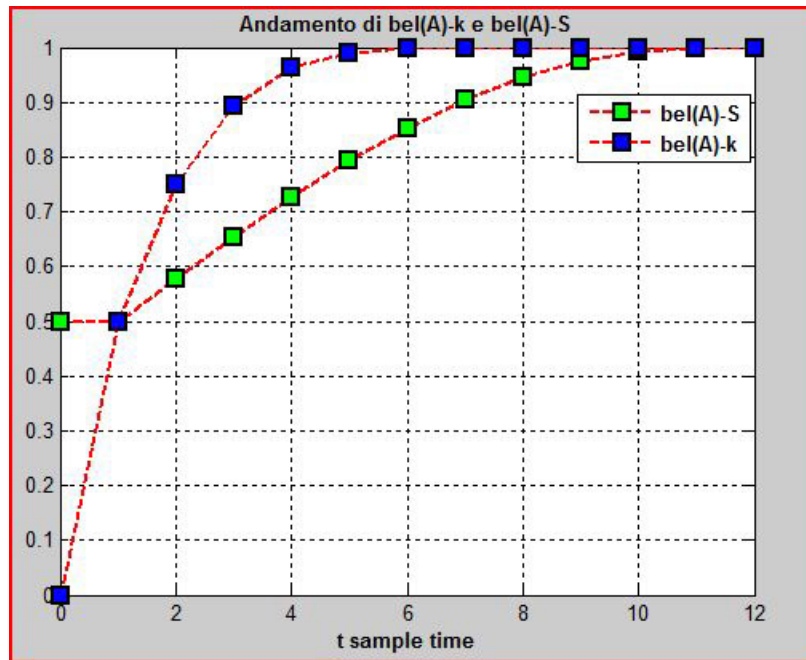


Figura 4.11: Bel(A) Vs bel(A)-sensor k=0

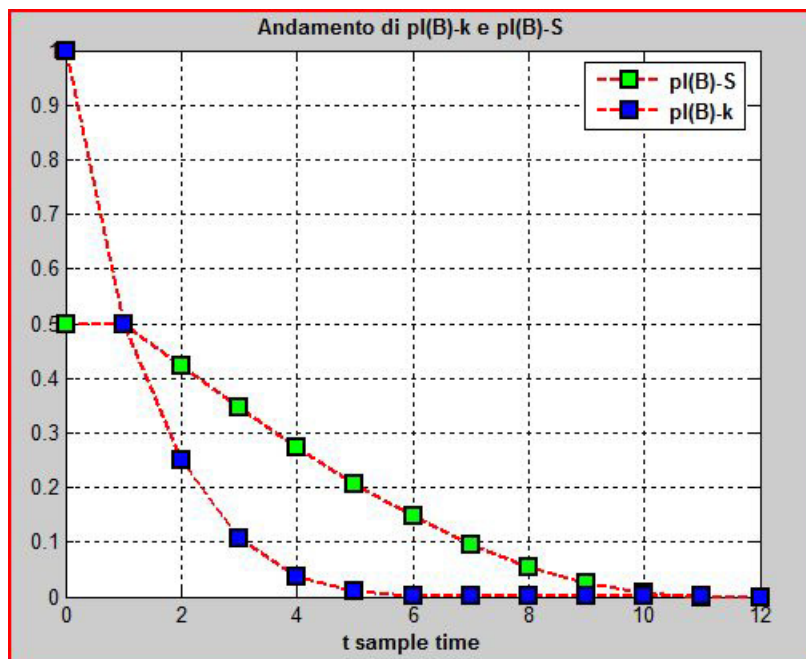
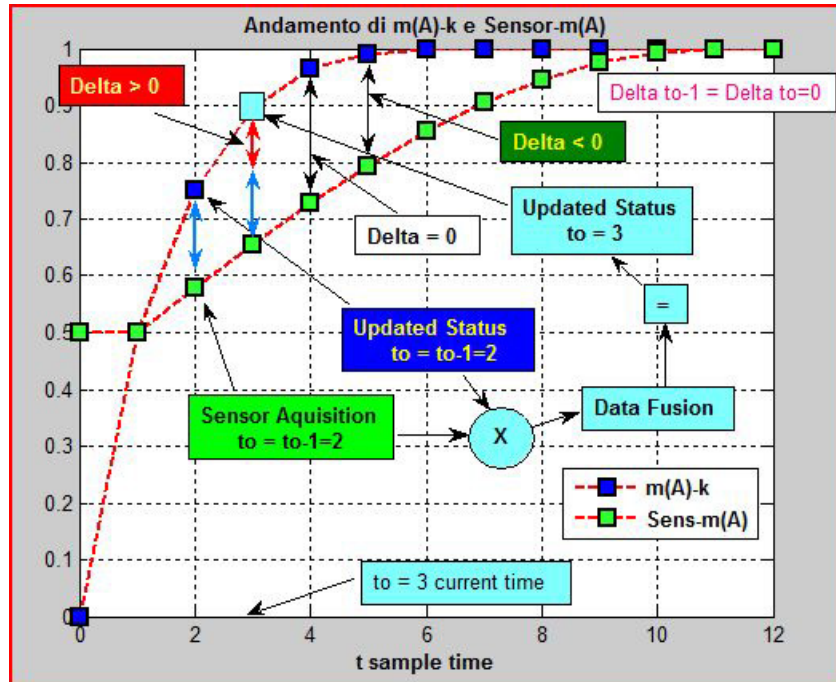
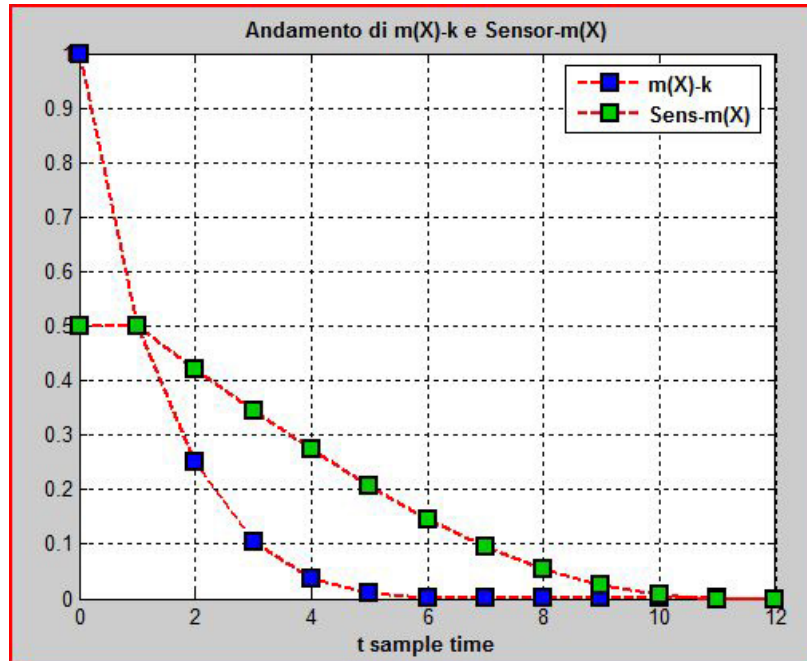


Figura 4.12: pl(B) Vs pl(B)-sensor k=0

Figura 4.13: $m(A)$ Vs $m(A)$ -sensor $k=0$

Osserviamo che la massa dello **Stato aggiornato** e quello relativo alle **acquisizioni del sensore** si muovono nella 'medesima direzione', e questo riflette una coerenza della nostra stima. Possiamo immaginare la distanza tra le due rispettive masse come la differenza tra le corrispondenti bba structure. Comunque non dobbiamo allarmarci se esse risultano differenti o per lo meno se la loro differenza non si mantiene alta. Infatti per valutare se la stima non diverge dalle acquisizioni del sensore occorre valutare se l'incremento di tale differenza allo step successivo diminuisce o meno.

Infatti notiamo che all'istante $t_0 = 4$ l'incremento si è annullato $\Delta = 0$ ed a partire dallo step successivo le acquisizioni del sensore si avvicinano allo stato aggiornato $\Delta < 0$, fino ad arrivare alla situazione di coincidenza ($\Delta(t_{0-1}) = \Delta(t_0) = 0$). La cosa a prima vista può sorprendere! Abbiamo paradossalmente le misure che inseguono le stime (E questa in teoria è la situazione ideale). Quindi la capacità dell'**Oracolo** di prevedere lo stato del sistema è uno strumento potente che deve essere utilizzato attentamente. **(Non sorprende il fatto che tale modello venga ampiamente utilizzato nel Risk Management, si potrebbe immaginare di fare dei pooling sui pronostici delle partite di calcio e vedere se una scelta opportuna di k ci possa far vincere al totocalcio!)** Infatti ad ogni step deve essere valutato il Δ e stabilire se effettivamente la nostra conoscenza del sistema e quella fornita dai sensori non vadano su direzioni opposte e che quindi le corrispondenti bba structure non risultino totalmente differenti. In un certo senso dobbiamo quantificare il grado di correlazione tra le bba structure del sistema. Quello che ho appena descritto è un modo piuttosto spartano di considerare la differenza tra la bba structure del Robot e quella fornita dal sensore; naturalmente è possibile definire delle norme più raffinate oppure altre strutture algebriche oppure valutare le relazioni d'ordine tra le commonality function e le implicability function di entrambe i sistemi.

Figura 4.14: $m(\mathbf{X})$ Vs $m(\mathbf{X})$ -sensor $k=0$

Osserviamo dalla 4.14 come l'andamento decrescente della massa dell'insieme universale $\mathbf{m}(\mathbf{X})$ coincida con quello della plausibilità di B. Infatti la riduzione dell'incertezza si traduce in un'aumento della credibilità che la cella sia occupata ed una diminuzione della plausibilità che sia vuota.

In fine per completare questa prima analisi, mostriamo come l'assenza di conflitto che abbiamo evidenziato precedentemente si traduce nel valore più basso che può assumere la $\mathbf{K}_D = \mathbf{1}$, si manifesta essenzialmente nella coincidenza dell'andamento della massa Non Normalizzata con quella Normalizzata osserviamo 4.15, il discorso è valido anche per gli altri insiemi del Power Set.

Dempster's Rule of Combination $k = k_D$

A questo punto risulta naturale domandarsi se selezionando la Regola di Dempster cambi o meno la situazione rispetto al caso precedente (Yager's $k = 0$)?

In realtà la situazione rimane esattamente la stessa. Infatti, l'assenza di conflitto nel sistema non dà luogo a nessun cambiamento delle masse normalizzate. Questo si può vedere dall'andamento dei valori delle costanti di normalizzazione che rimane esattamente lo stesso alla situazione di Yager. 4.16

In sintesi, ciò significa che il comportamento del sistema non cambia se selezioniamo un qualsiasi valore di $\mathbf{k} \in \left[0 \quad \overbrace{1}^{k_D} \right]$.

Inagaki's Rule of Combination $k = k_I$

A questo punto risulta evidente che anche la scelta della regola di Inagaki non cambia la situazione. Quindi possiamo arbitrariamente scegliere un qualsiasi valore di $\mathbf{k} \in [0 \quad k_I]$, ed il nostro algoritmo di fusione darà luogo al medesimo comportamento.

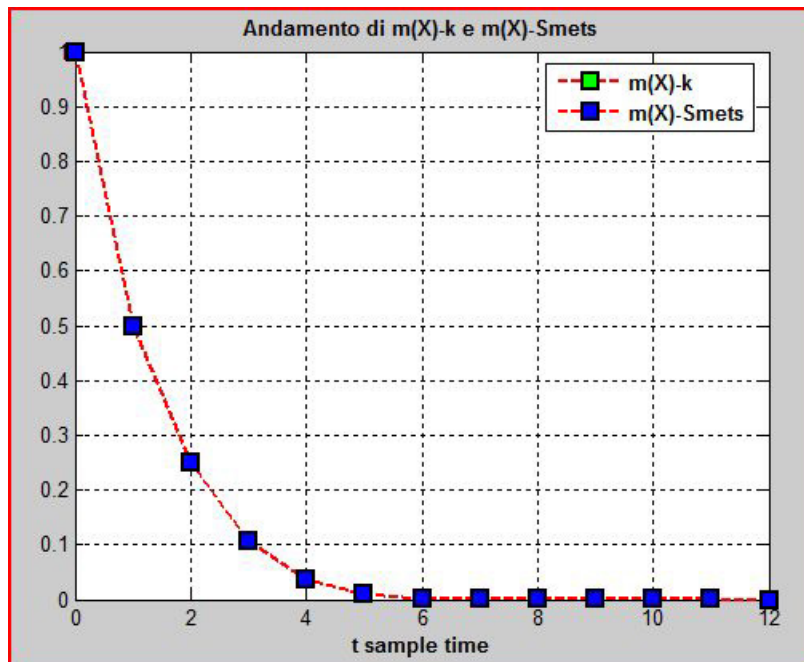


Figura 4.15: $m(X)$ -Smets Vs $m(X)$ -k=0

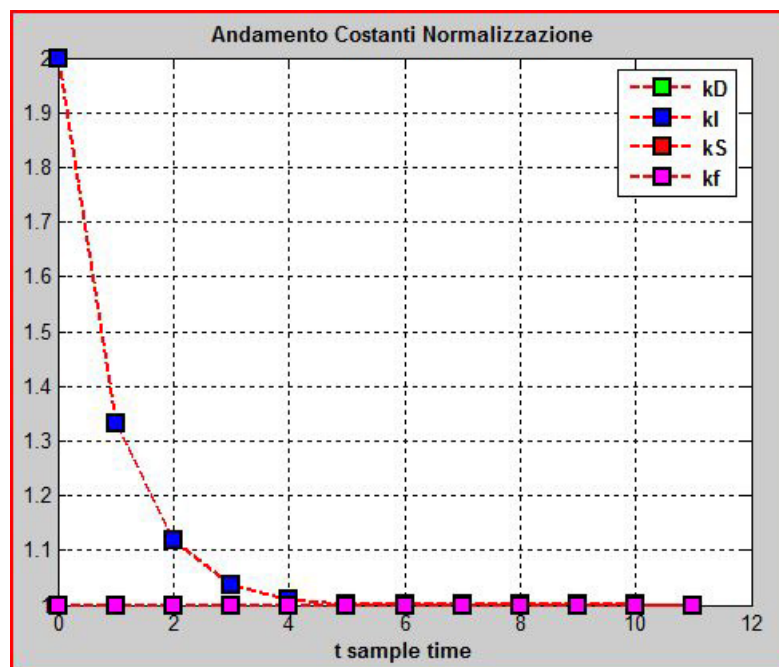


Figura 4.16: k dynamic values Dempster

Oltre la Inagaki's Rule

Prima di chiudere questa analisi, esaminiamo il comportamento del sistema per una scelta del parametro k che sia $k > k_I$. Naturalmente il valore massimo di k ammissibile è quello in corrispondenza del quale si filtrano completamente il conflitto e l'ignoranza del sistema, giungendo ad un'assegnazione delle probabilità a tutti gli eventi del Power Set, portando quindi il sistema a collassare nella classica teoria probabilistica. Nella teoria ho definito personalmente tale valore k_S ovvero k **Supreme**. A questo punto studiamo il comportamento del sistema in funzione della scelta di un valore di k definito in termini di k_I . In particolare possiamo notare dalle figure 4.17, 4.18, 4.19 e 4.20 che è possibile scegliere valori di k tali che $k < 2k_I$, altrimenti l'algoritmo di normalizzazione diventa instabile. Infatti, in corrispondenza di $k = 2k_I$ non è ammessa l'operazione di normalizzazione in quanto $k \rightarrow \infty$.

Comunque osserviamo che al crescere del valore di k la dinamica dei valori delle costanti di normalizzazione convergono prima ad uno, comunque questo non influisce sull'evoluzione generale del processo in quanto il conflitto è nullo. Quindi è indifferente in questo caso scegliere un valore di $k < 2k_I$. Questo si traduce nella specifica esplicita che un qualsiasi valore della costante k può essere scelto, tanto l'operazione di normalizzazione rimane sempre la stessa. D'altronde osserviamo dai grafici che scegliendo un valore arbitrariamente grande di k la situazione non cambia.

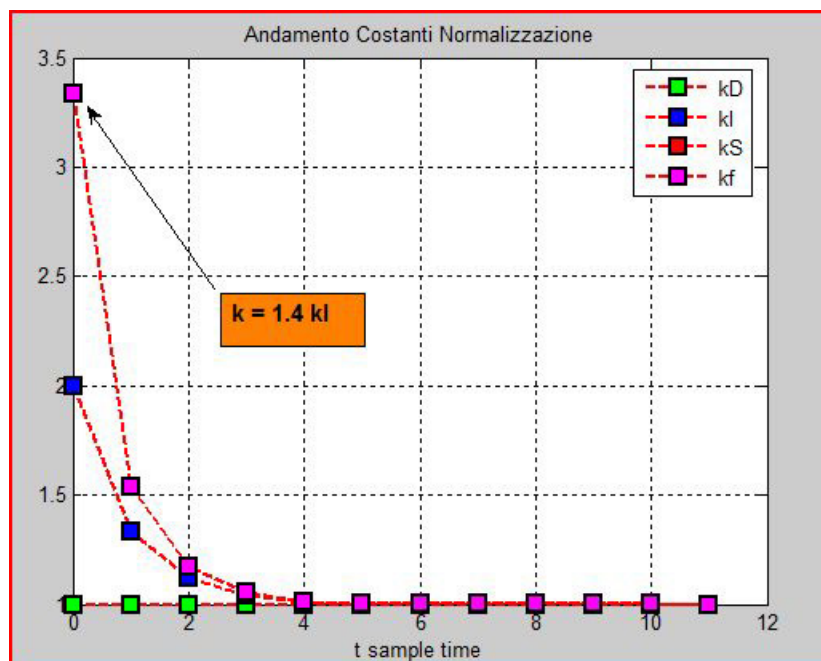


Figura 4.17: k dynamic values -1.4 k_I

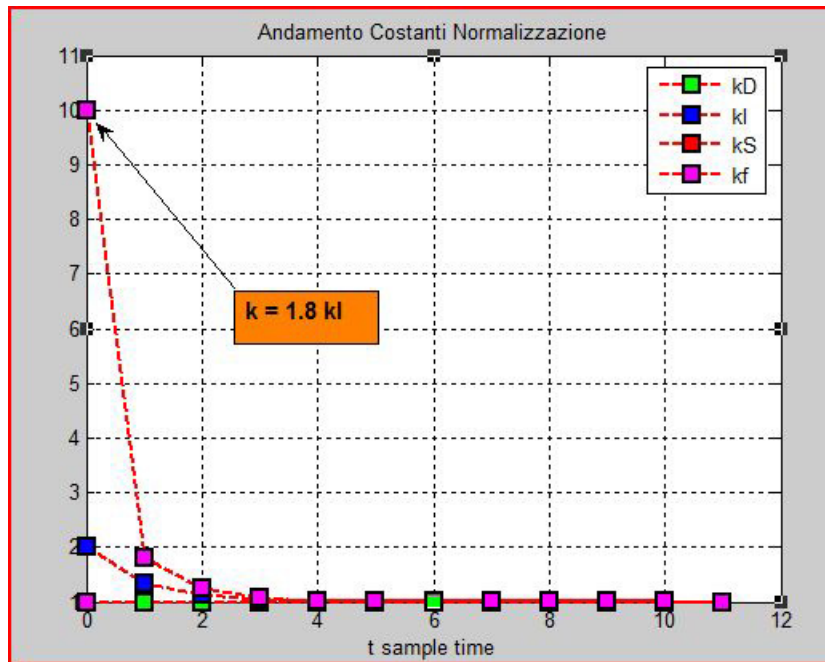


Figura 4.18: k dynamic values -1.8 kI

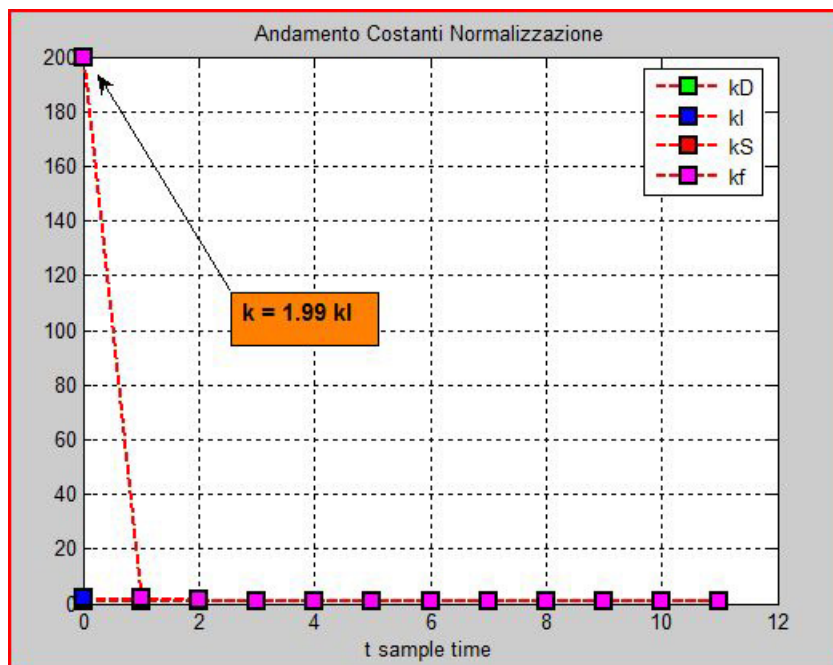
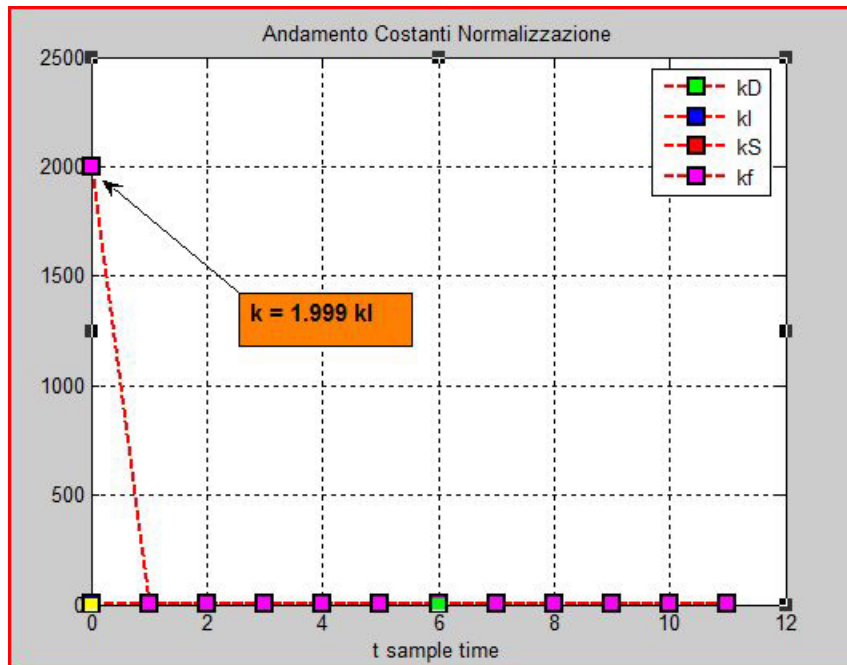


Figura 4.19: k dynamic values -1.99 kI

Figura 4.20: k dynamic values -1.999 k_I

4.3.3 Massimo Conflitto

Consideriamo ora la situazione in cui il Robot in base ad una vecchia mappa dell'ambiente, parta da uno Stato iniziale che non prevede la presenza di oggetti sulla cella considerata. Quindi avremo che:

$$\mathbf{m}_0 = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ 1 \\ \cdot \end{bmatrix}$$

Ovviamente la configurazione effettiva dell'ambiente è cambiata. Tuttavia non dobbiamo allarmarci, in quanto saranno le acquisizioni del nostro sensore a modificare lo stato della mappa. In particolare analizzeremo come in questa circostanza la scelta del parametro k possa essere determinante nell'evoluzione del sistema.

Yager's Rule of Combination $k = 0$

A differenza della condizione iniziale precedente, abbiamo una situazione di **Conflitto iniziale** il quale (come lascia facilmente intuire) influisce notevolmente sulla scelta del parametro k . Analizziamo quindi l'effetto di confinare tale conflitto nell'insieme Universale X , applicando la Regola di Yager. Nell'analisi che segue ripercorreremo a grandi linee gli step condotti in precedenza.

Innanzitutto osserviamo dalla figura 4.21, che mostra i valori che assume la massa non normalizzata dell'insieme Universale e del Null Set ad ogni step, come inizialmente il conflitto sia significativo. In questo caso la nostra scelta ad ogni passo sarà quella di tradurre tale conflitto in uno **Stato di Ignoranza**, nella speranza che le successive misure forniscano dei dati più accurati.

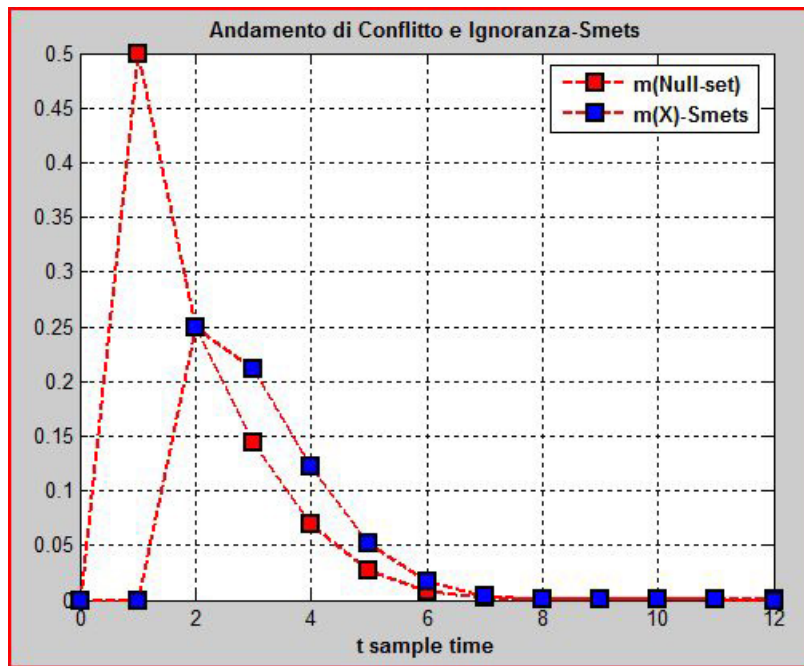


Figura 4.21: Conflict-vs-Ignorance-2

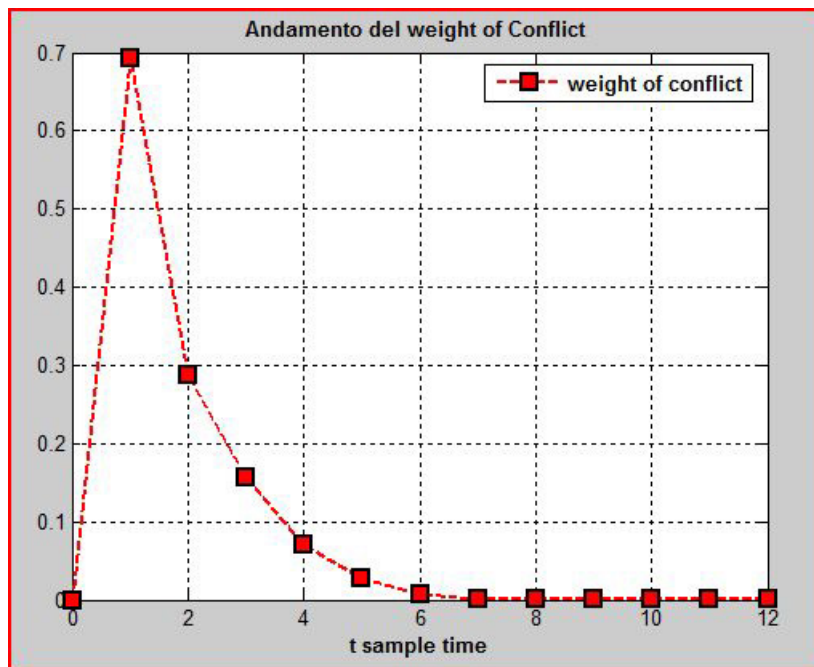


Figura 4.22: Weight of conflict-2

Dall'andamento del **weight of conflict** in figure 4.22 vediamo che tale scelta filtra lentamente il conflitto tra le prove del Power Set, convergendo allo stato finale con una velocità minore rispetto al caso di Totale Ignoranza.

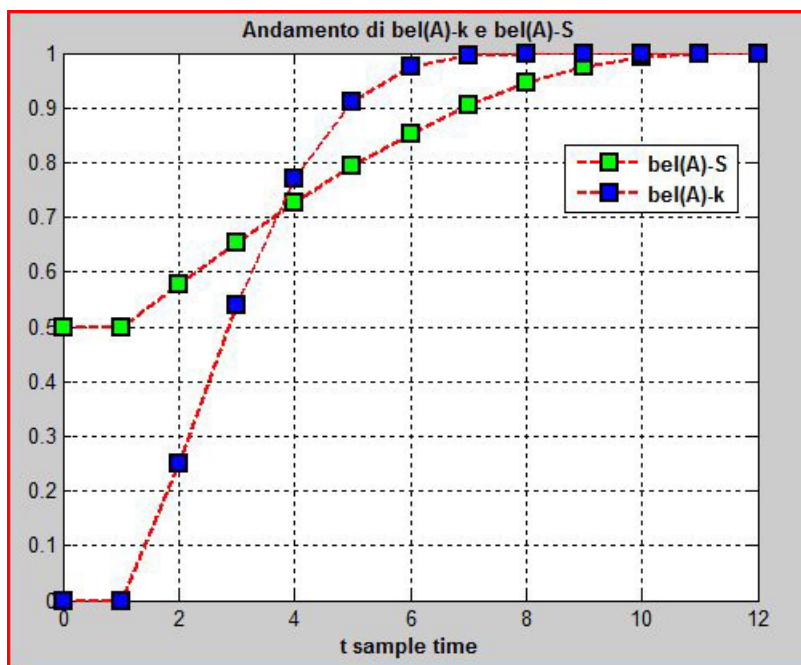


Figura 4.23: **Belief(A) and Bel(A)S-2**

Infatti possiamo dire che il sistema raggiunge lo stato finale solo all'ottavo campione 4.23, 4.24 a differenza della situazione di Totale Ignoranza (dove era il sesto campione).

Questo comportamento è evidente osservando l'andamento della massa dell'insieme Universale normalizzato rispetto a quello Non normalizzato, dove notiamo una notevole differenza tra i rispettivi valori che va naturalmente accorciandosi con l'avvicinamento del Robot all'ostacolo.4.25

In particolare nella figura 4.26 notiamo che inizialmente l'incertezza del Robot risulta maggiore rispetto a quella fornita dalle misure del sensore, la quale in seguito va riducendosi con le misure successive, fino a raggiungere una situazione d'equilibrio.

In fine analizziamo l'andamento delle **costanti di normalizzazione**. E' interessante notare come l'avvicinarsi di $k_D \rightarrow 1$ diminuisca la presenza di conflitto tra la sorgente ed il Robot. Inoltre la scelta di accumulare tale conflitto nell'insieme universale si manifesta nel notevole Gap tra k_S e k_I . Naturalmente k_S e k_I coincidono quando non c'è più possibilità di distribuire il conflitto nel sistema. Una volta che arrivano delle prove più consistenti vediamo che si riduce anche il valore di k_S .

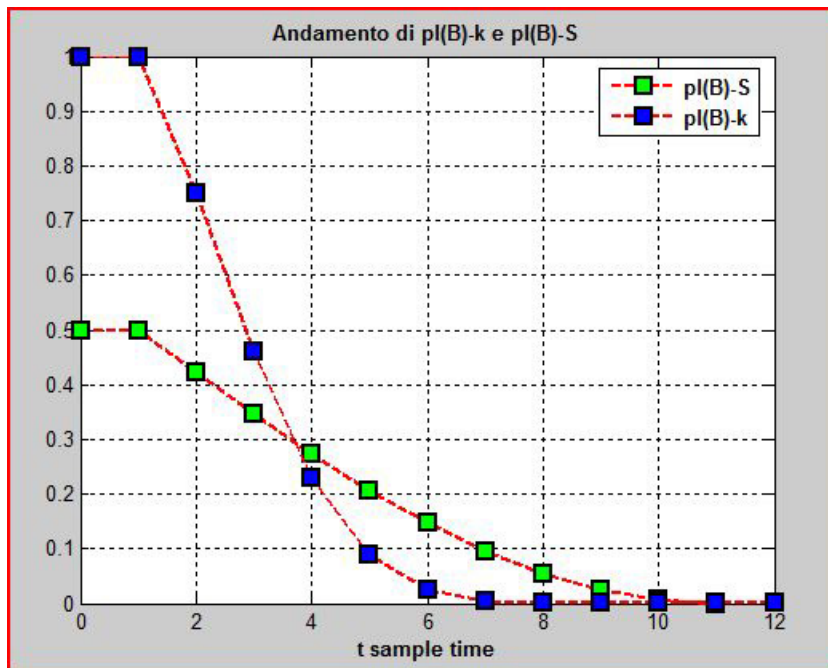


Figura 4.24: PI(B) and PI(B)S-2

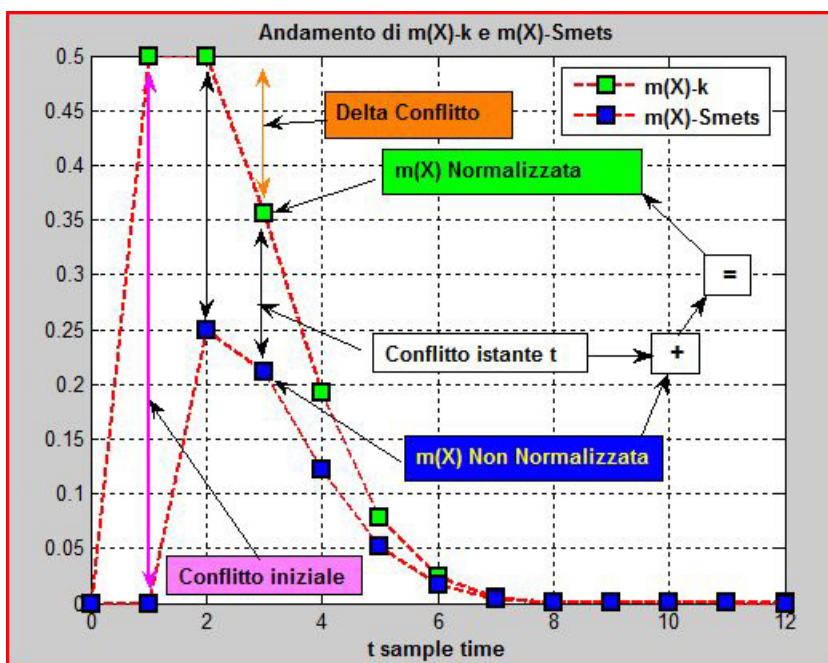


Figura 4.25: m(X)-Yager's Rule

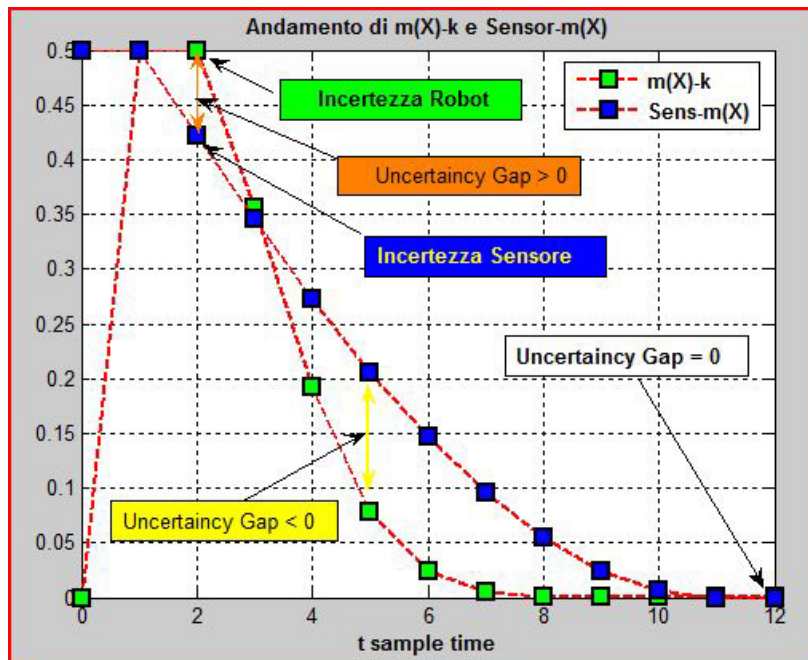


Figura 4.26: uncertainty gap

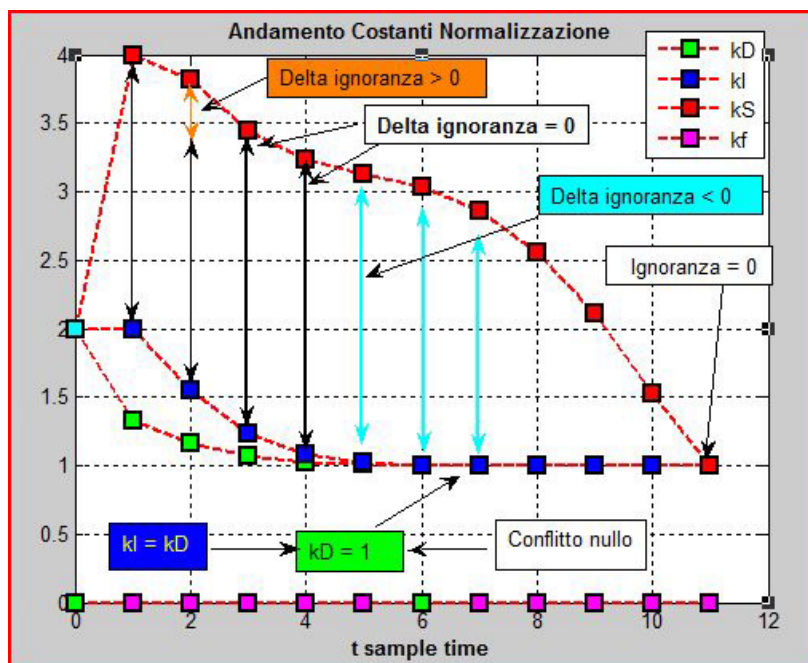


Figura 4.27: uncertainty gap-k normalization

Dempster's Rule of Combination:

A questo punto risulta chiaro che l'evoluzione della Regola di Dempster ci porta completamente fuori strada, o per essere sarcastici **porterà il Robot a sfracellarsi contro l'ostacolo!** Infatti la presenza iniziale di conflitto nel sistema porta ad una notevole divergenza nella stima dello stato del sistema, la quale ovviamente influenzerà tutti gli stati successivi. In particolare la stima risulta Polarizzata sull'unica prova in comune, ovvero sullo stato di cella libera; contrariamente alle acquisizioni del sensore.

D'altronde dalla figura 4.28 notiamo che la **Belief del Robot relativa allo stato Cella occupata** rimane a Zero mentre quella del sensore si allontana. Analogo discorso viene fatto per la **Plausibility di B** che rimane costante ad 1. Quindi rispetto alla situazione precedente vediamo che si sono invertiti i ruoli tra le due proposizioni. Ovvero si assiste ad un valore alto della Belief di cella Vuota da parte del Robot ed un valore basso di Plausibilità di A. Fino a giungere ad una situazione di completo conflitto.

Questo comportamento è legato alla crescita della massa del Null Set della massa Non normalizzata 4.29 che si riflette in un corrispondente aumento del **weight of conflict** che presenta un'andamento monotono crescente. 4.30 In fine si osserva che il valore finale di k è stratosferico in quanto si è raggiunta una situazione di massimo conflitto 4.31.

Inoltre un cattivo segno del comportamento del sistema è visibile proprio dall'andamento delle costanti di normalizzazione 4.32, dove si osserva inizialmente una costanza sul valore zero fino ad arrivare ad un'incremento improvviso dovuto alla presenza di totale conflitto.

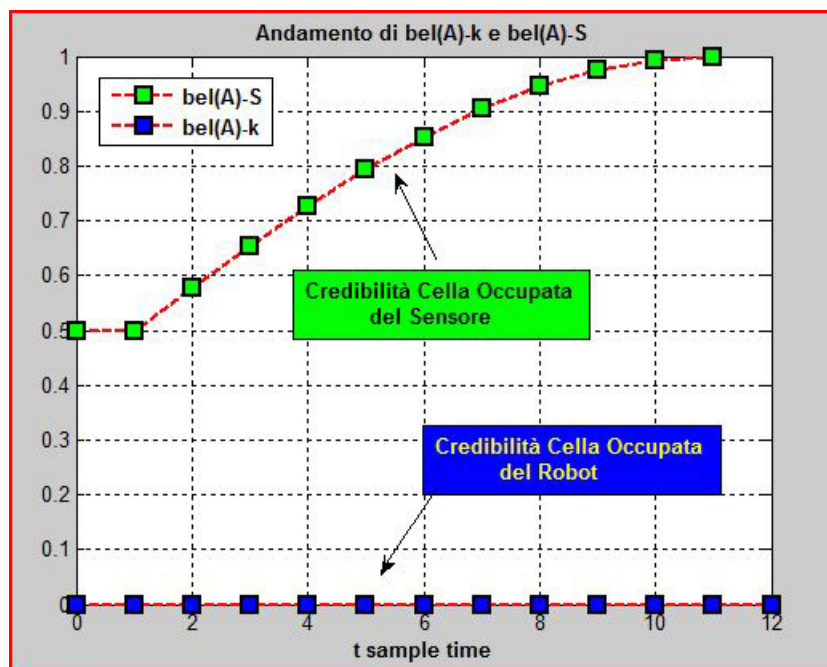


Figura 4.28: Dempster-Conflict

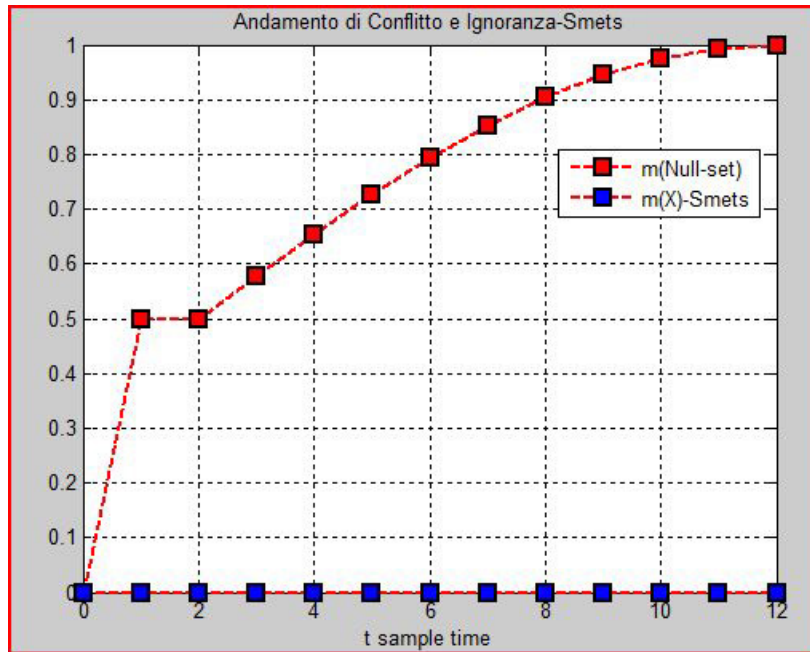


Figura 4.29: mass-Conflict

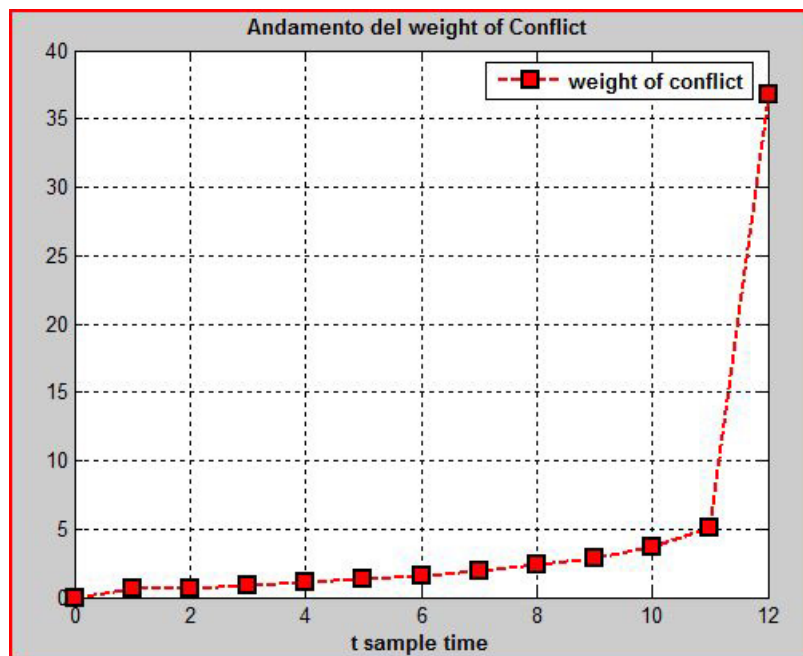


Figura 4.30: weight of evidence-3

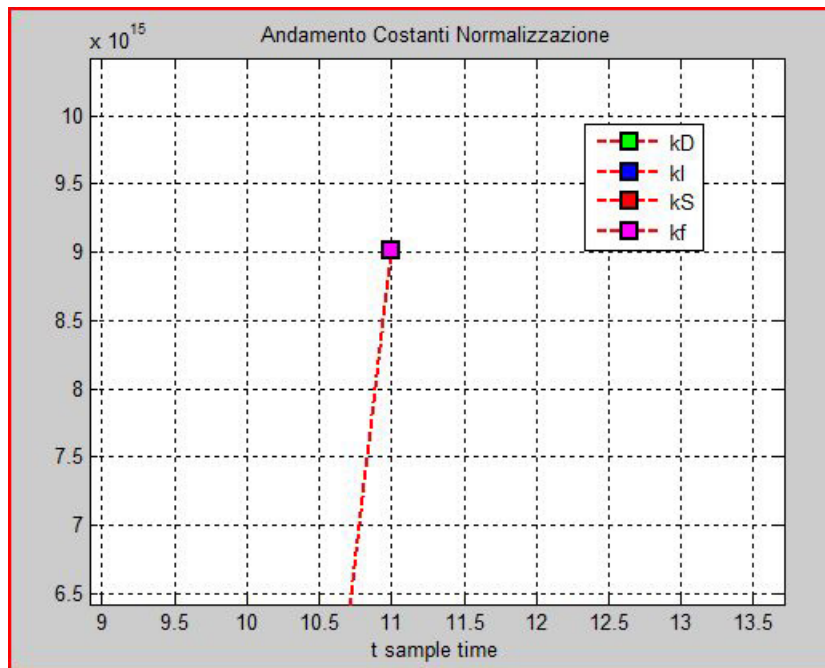


Figura 4.31: final normalization constant

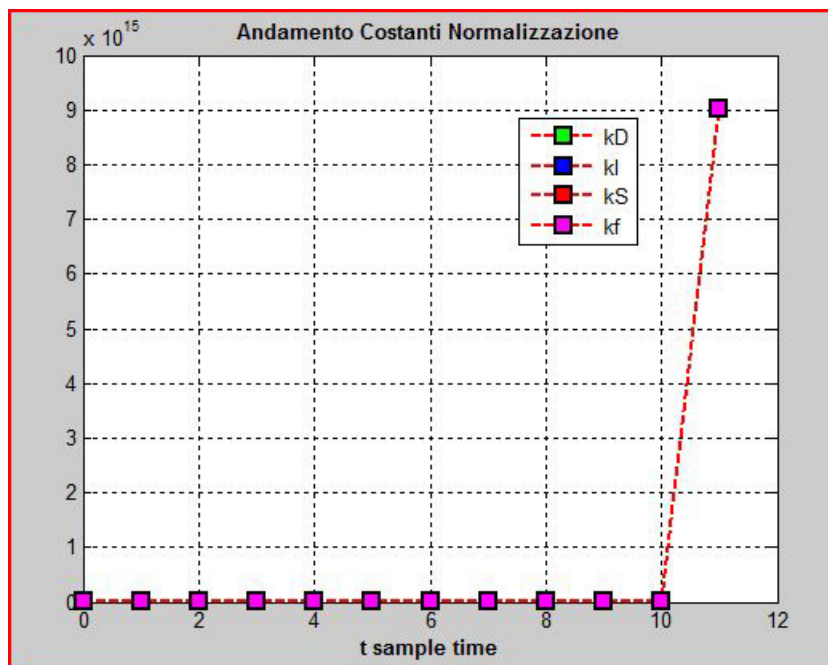


Figura 4.32: bad normalization constant

Interpolating Or Extrapolating Dempster's Rule

Naturalmente a questo punto non ha senso considerare le regole che estrapolano quella di Dempster, perchè presentano lo stesso comportamento polarizzato. Questo è legato alla loro sensibilità al conflitto iniziale che pregiudica l'andamento della stima.

Pertanto risulta più significativo studiare il comportamento del sistema considerando la classe di Regole che interpolano quella di Dempster. Nello specifico analizzeremo l'andamento della stima per valori di k che si avvicineranno sempre più a quelli di k_D .

Partendo da una situazione intermedia, ovvero $k = 0.5k_D$, osserviamo in figura 4.33 un comportamento regolare per quanto riguarda l'andamento delle costanti di normalizzazione. Inoltre notiamo un'aumento iniziale di conflitto 4.34 che va scemando verso la fine con la convergenza allo stato finale. 4.35,4.36.

Avvicinandoci maggiormente alla regola di Dempster $k = 0.9k_D$, osserviamo che l'andamento delle costanti di normalizzazione 4.37 definisce un gap molto più ristretto tra i loro valori. Inoltre il conflitto non presenta più un'andamento decrescente regolare, 4.38 con un conseguente ritardo nel raggiungere lo stato finale di cella occupata. Quindi avvicinandosi sempre più alla costante di Dempster il sistema presenta una risposta più lenta, fino a raggiungere una stima polarizzata in corrispondenza di $k = k_D$ (Dico esattamente, infatti scegliendo $k = 0.99999k_D$ l'algoritmo continua a convergere anche se con molta fatica).

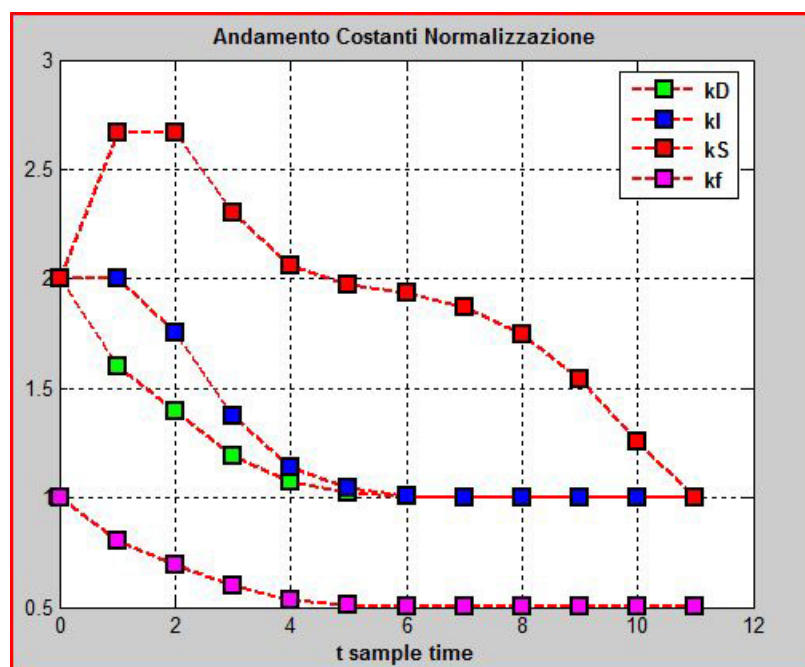


Figura 4.33: normalization constant $k=0.5 k_D$

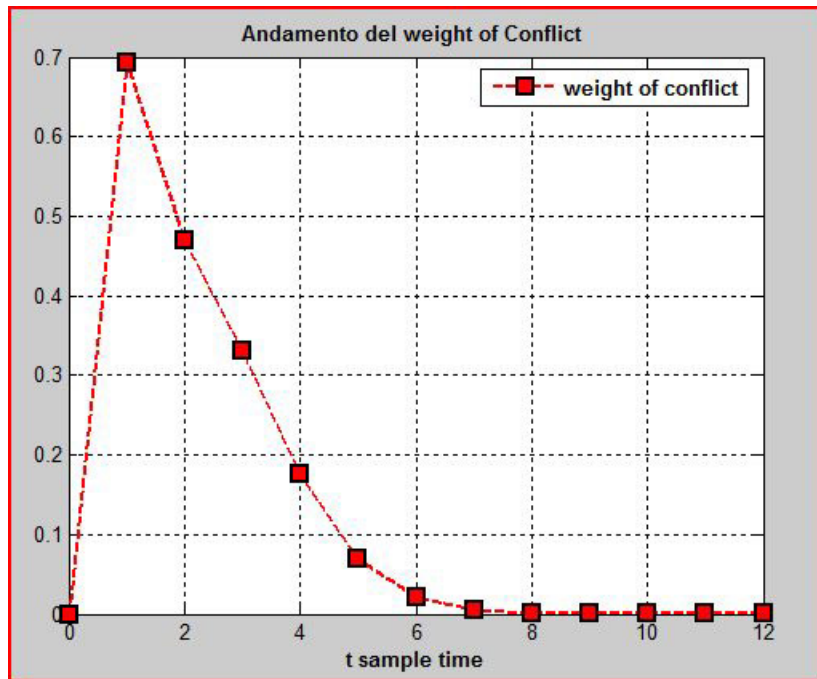


Figura 4.34: weight of conflict $k=0.5$ kD

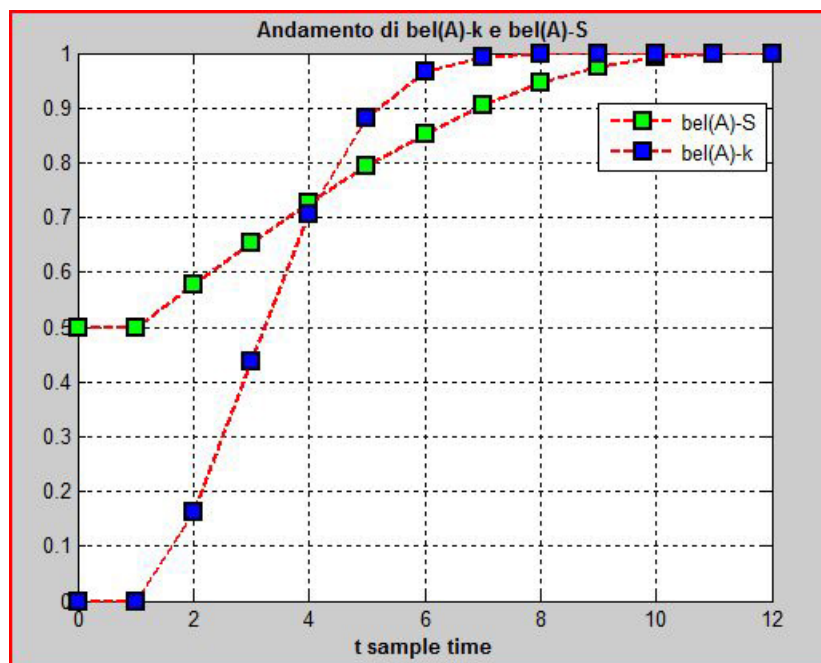


Figura 4.35: belief(A) $k=0.5$ kD

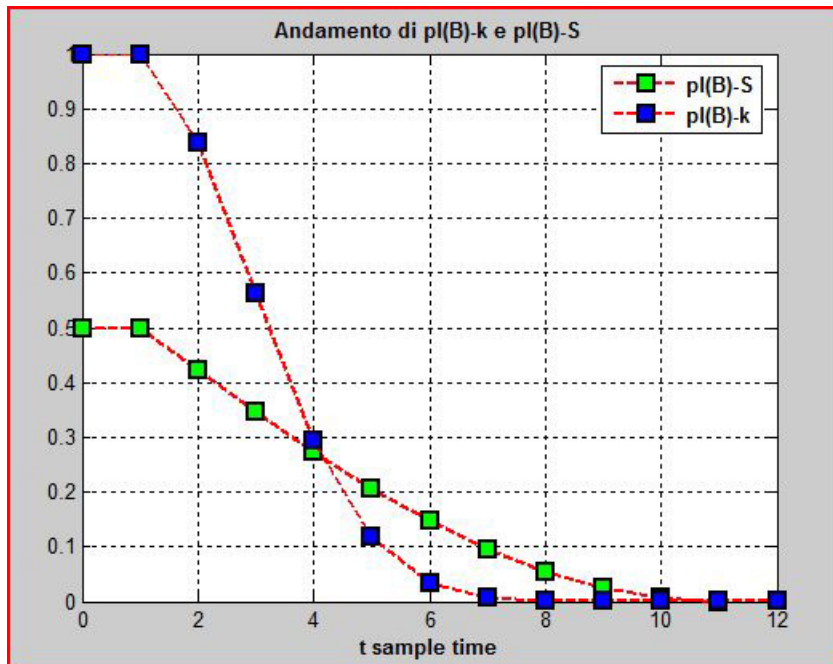


Figura 4.36: $pl(B)$ $k=0.5$ kD

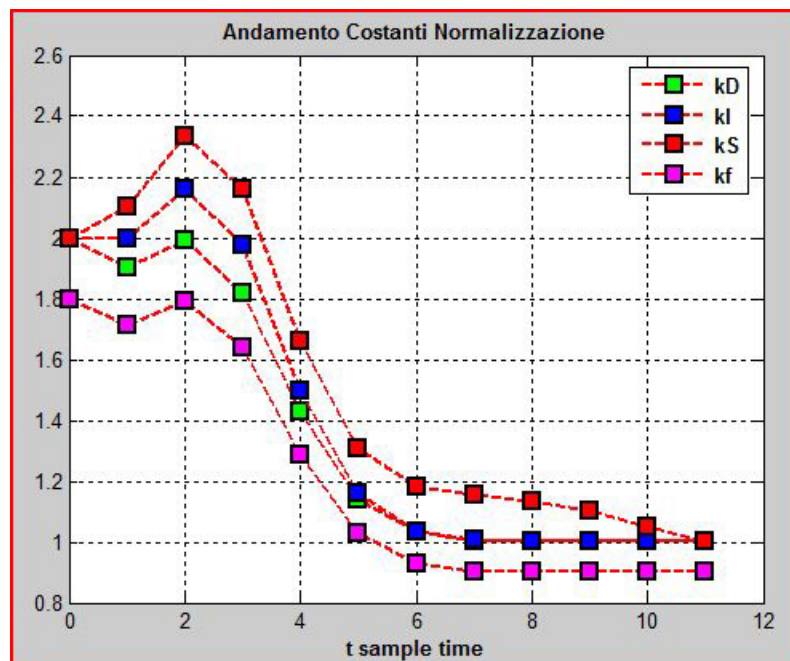


Figura 4.37: normalization constant $k=0.9$ kD

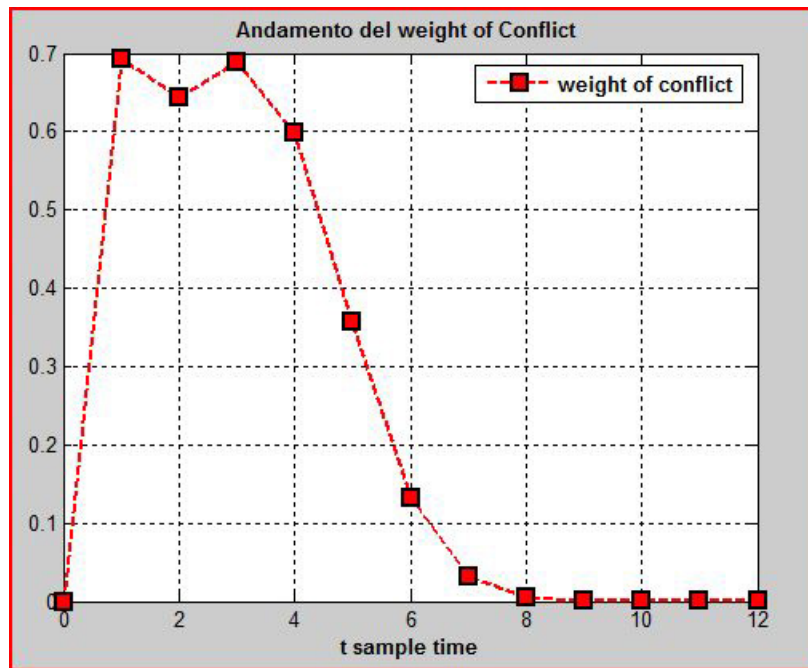


Figura 4.38: weight of conflict $k=0.9$ kD

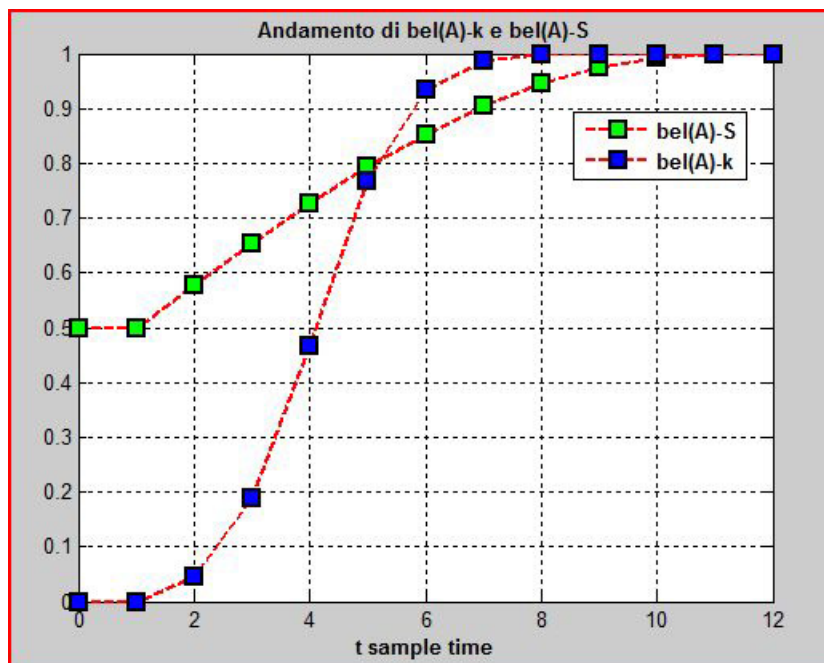
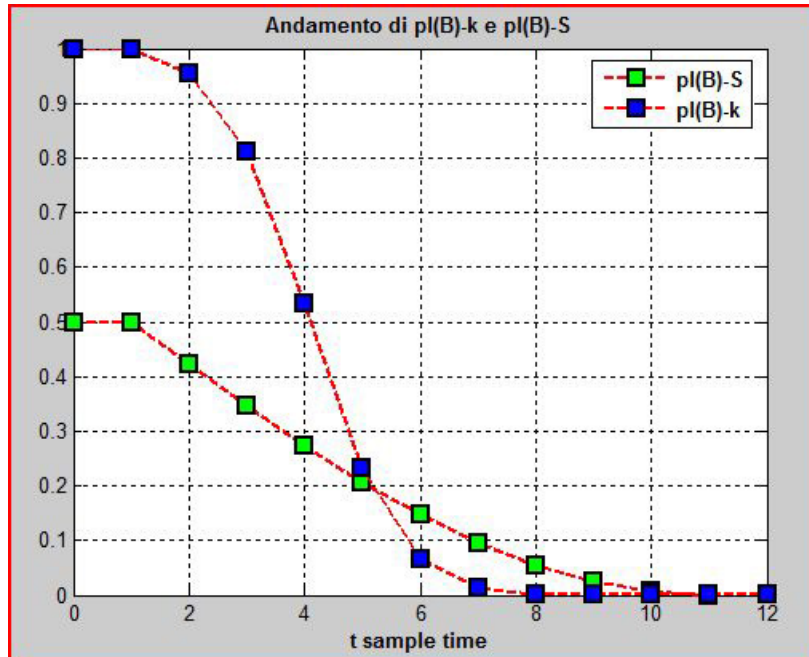


Figura 4.39: belief(A) $k=0.9$ kD

Figura 4.40: $pl(B)$ $k=0.9$ kD

Dempster's Rule Sensitivity

Prima di chiudere lo studio di questa condizione iniziale vorrei mostrare come perturbando 'minimamente' questa situazione di massimo conflitto possa cambiare radicalmente la situazione. Soprattutto la Regola di Dempster convergerà allo stato finale se nelle bba iniziali vi è un'infinitesima intersezione non nulla con lo stato di cella occupata. Dalle figure che seguono osserviamo che l'algoritmo impiega tempo e fatica a convergere.

$$\mathbf{m}_0 = \begin{bmatrix} \cdot \\ 0.001 \\ 0.999 \\ \cdot \end{bmatrix}$$

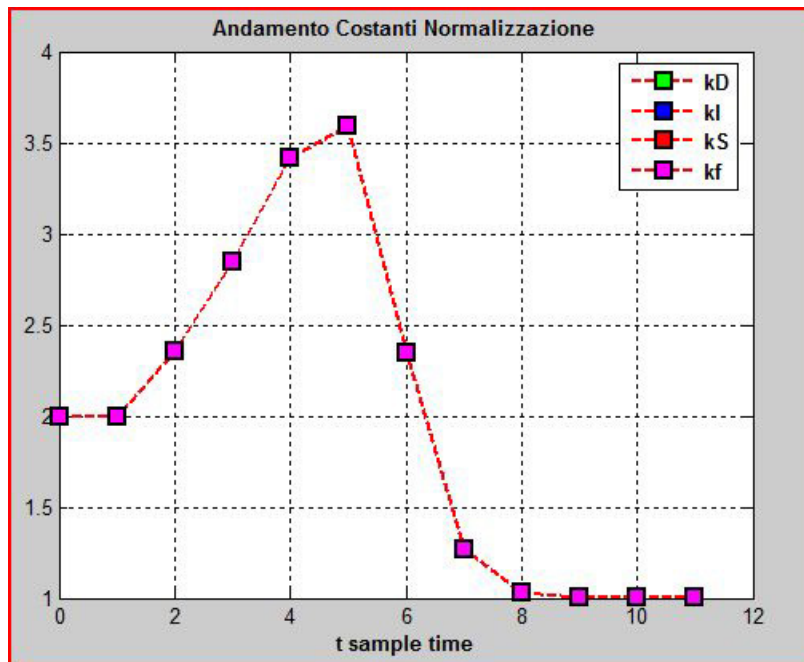


Figura 4.41: normalization constant sensitive

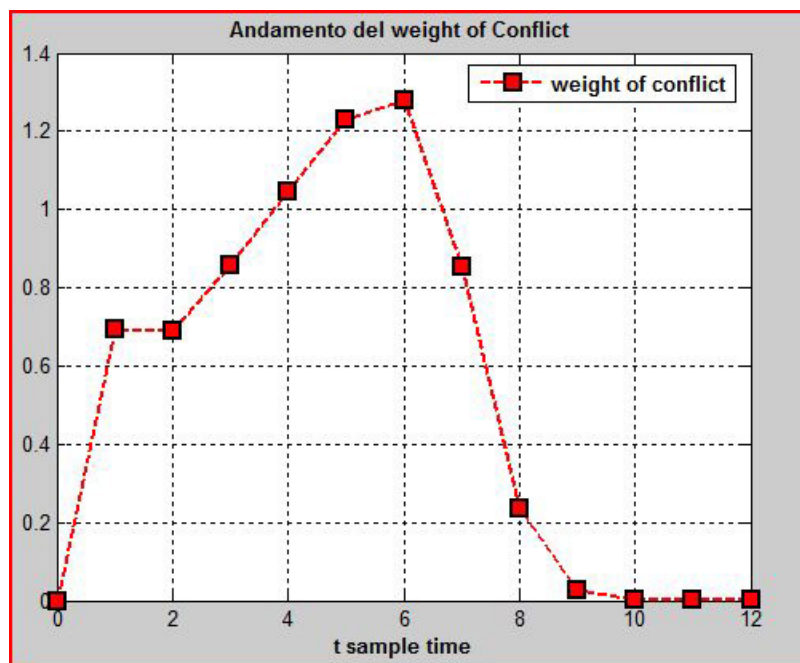


Figura 4.42: weight of conflict sensitive

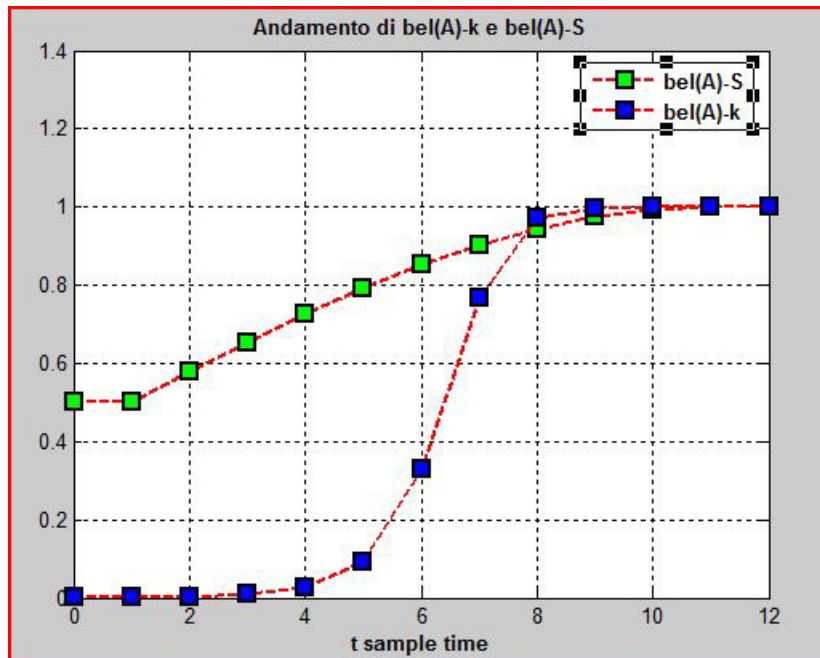


Figura 4.43: belief(A) sensitive

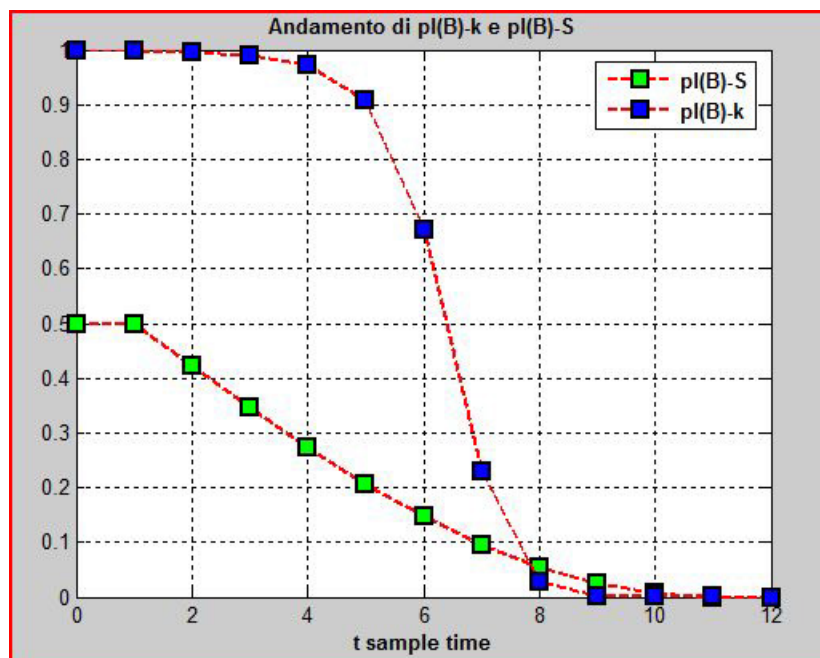


Figura 4.44: pl(B) sensitive

4.3.4 Minimo Conflitto

Consideriamo ora la situazione diametralmente opposta a quella precedente e supponiamo che il Robot abbia caricato in memoria una mappa che rispecchia l'effettiva configurazione dell'ambiente. Analizziamo quindi come una situazione di completo accordo e minimo conflitto con le acquisizioni del sensore determini o meno un cambiamento per la scelta del parametro k .

Valutazione della Regola idonea

Nei paragrafi precedenti abbiamo confrontato le varie classi di regole che interpolavano ed estrapolavano quella di Dempster; ora in questo paragrafo mostriamo direttamente che la scelta risulta del tutto indifferente. In particolare riportiamo l'andamento corrispondente alla regola di **Dempster** che comunque riflette il comportamento generale per gli altri valori di k . Risulta chiaro che queste considerazioni sono valide solo per il data-set che descrive questo specifico scenario. (Con la consapevolezza che le misure fornite dal sensore sono attendibili)

Dalla figura 4.45 osserviamo come la mappa del Robot rimanga esattamente identica allo stato iniziale. Quindi le misure del sensore non fanno altro che confermare la correttezza dei dati che abbiamo a disposizione. Questo ovviamente si riflette in una completa assenza di conflitto 4.47 che si può analizzare anche dall'andamento delle costanti di normalizzazione 4.48.

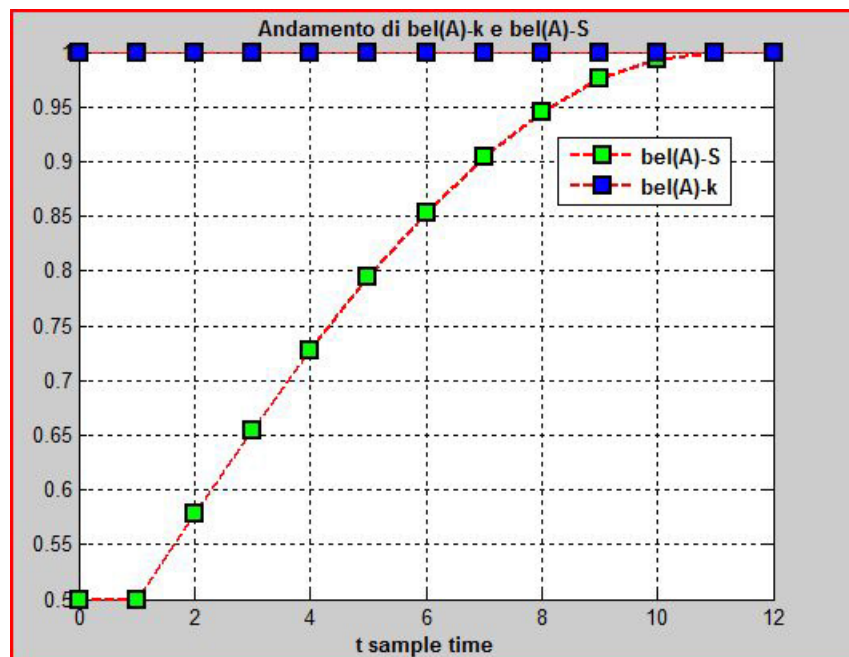


Figura 4.45: no-conflict $bel(A)$

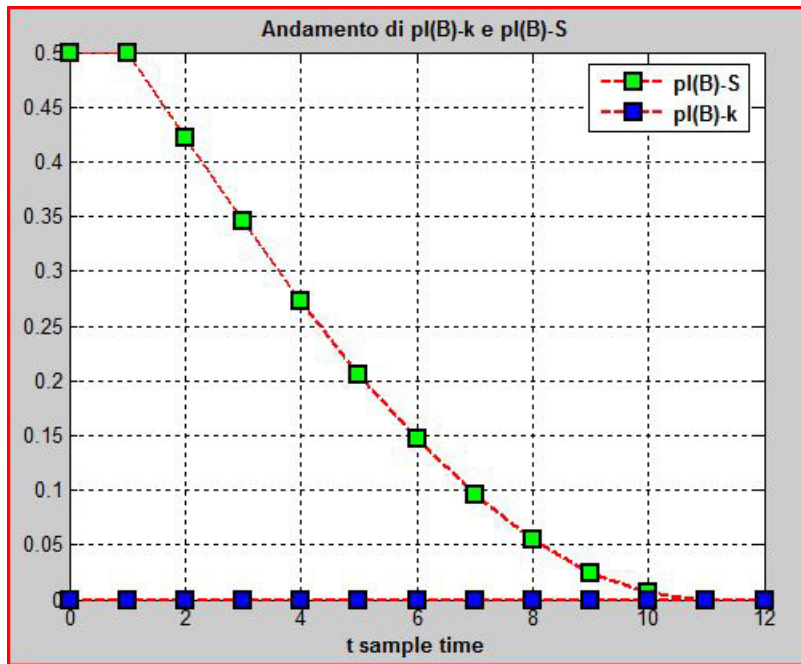


Figura 4.46: no-conflict $pl(B)$

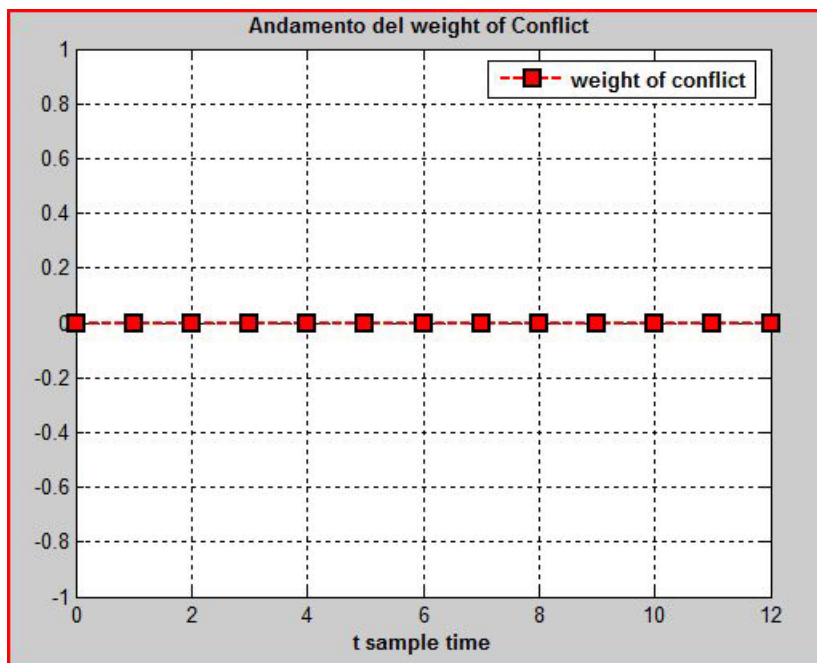


Figura 4.47: no-conflict wofc

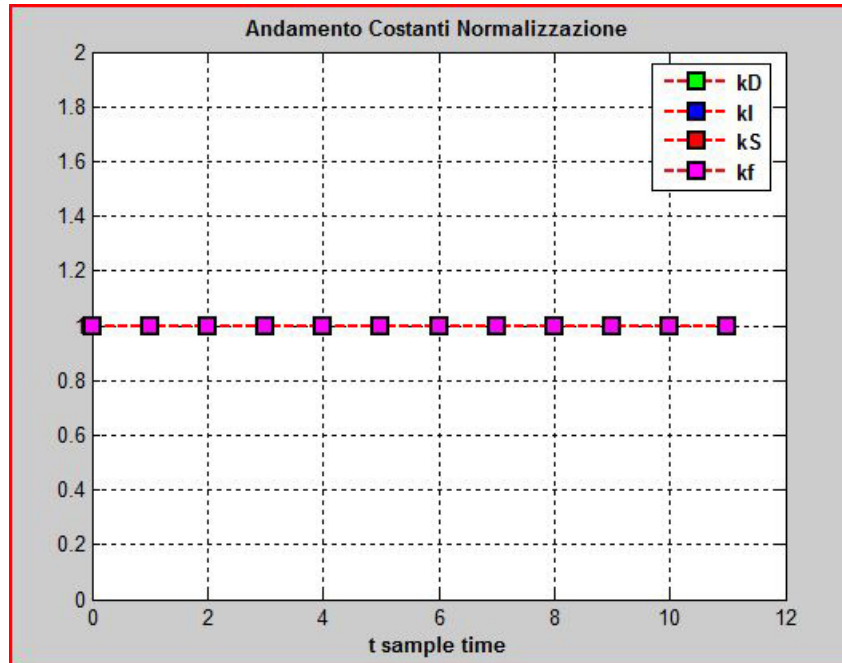


Figura 4.48: normalization constant-no conflict

4.3.5 Distribuzione di probabilità uniforme

Consideriamo ora una situazione in cui il concetto di Totale Ignoranza si traduce in termini probabilistici in una **distribuzione uniforme** in cui abbiamo il **50%** di probabilità che la cella risulti libera oppure occupata. In realtà, andrebbe forse interpretata sotto un'altra luce il discorso di assegnare una distribuzione uniforme agli eventi del sistema in oggetto; perchè un conto è dire: **Tutto è plausibile** (che rispecchia una configurazione 'potenziale') ed un conto è dire **Tutto è probabile** (che rispecchia una situazione d'equilibrio delle forze). Confronteremo quindi questa situazione con quella studiata inizialmente. In particolare va sottolineato che il primo campione dell'acquisizione del sensore presenta un 50% che la cella risulti occupata ed un restante 50% che la cella sia libera .

$$\mathbf{m}_0 = \begin{bmatrix} \cdot \\ 0.5 \\ 0.5 \\ \cdot \end{bmatrix}$$

Yager's Rule of Combination $k = 0$

Consideriamo la situazione in cui traduciamo la nostra indecisione iniziale in uno Stato di Ignoranza accrescendo la massa dell'Insieme Universale. Dall'analisi dei grafici 4.49 e 4.50 possiamo dedurre che la velocità con cui converge verso allo stadio finale è minore rispetto a quella ottenuta in caso di Totale ignoranza. Inoltre osserviamo come l'andamento della massa dell'insieme universale normalizzato tenda a diminuire molto lentamente 4.51. Questa scelta di confinare il conflitto nell'insieme universale si riflette anche sull'andamento delle costanti di normalizzazione dove è visibile un notevole gap iniziale tra k_I e k_S 4.52. In fine riportiamo l'andamento del **weight of conflict** che rispetto alla situazione di totale ignoranza è naturalmente maggiore. 4.53

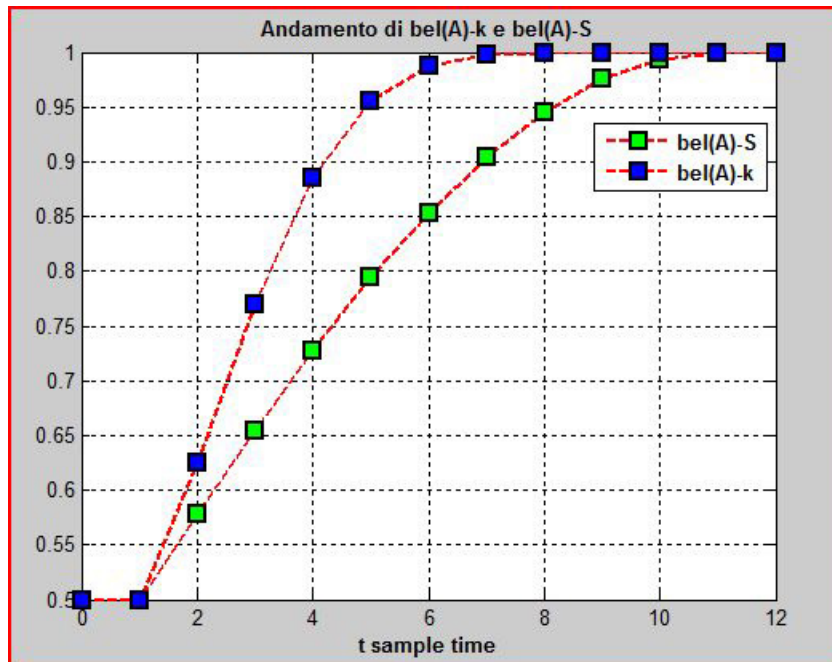


Figura 4.49: uniform-mass bel(A)

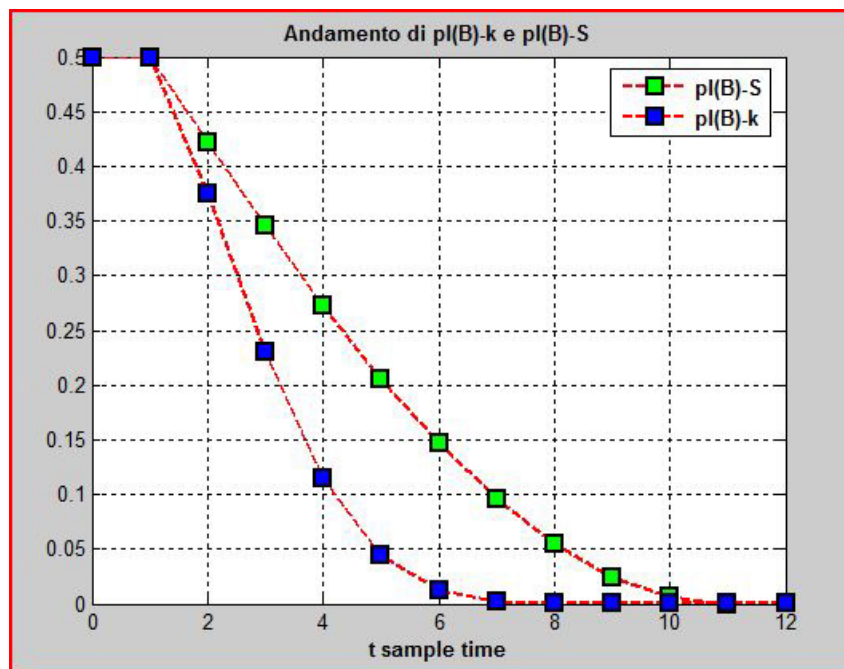


Figura 4.50: uniform-mass pl(B)

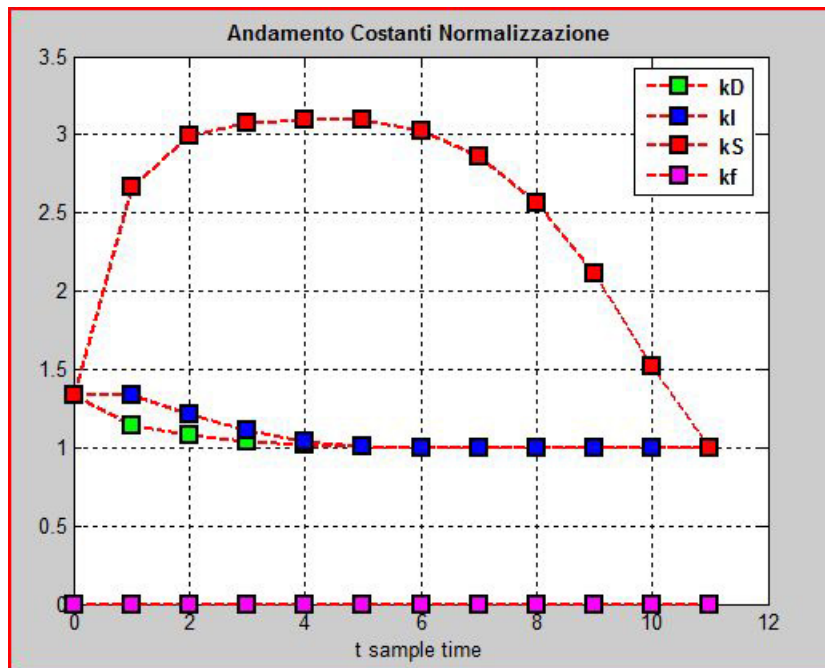


Figura 4.51: $m(X)$ uniform-distribution

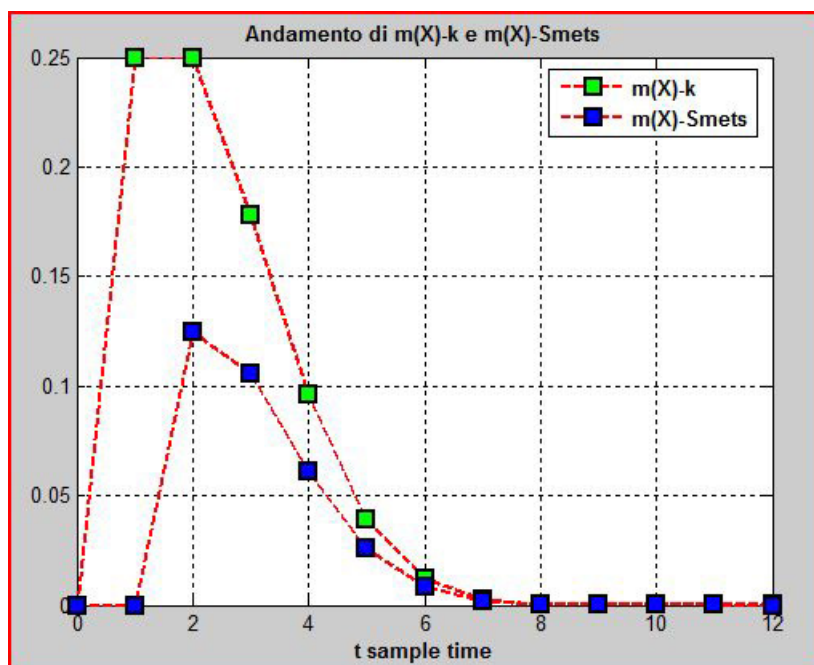


Figura 4.52: normalization constant-uniform

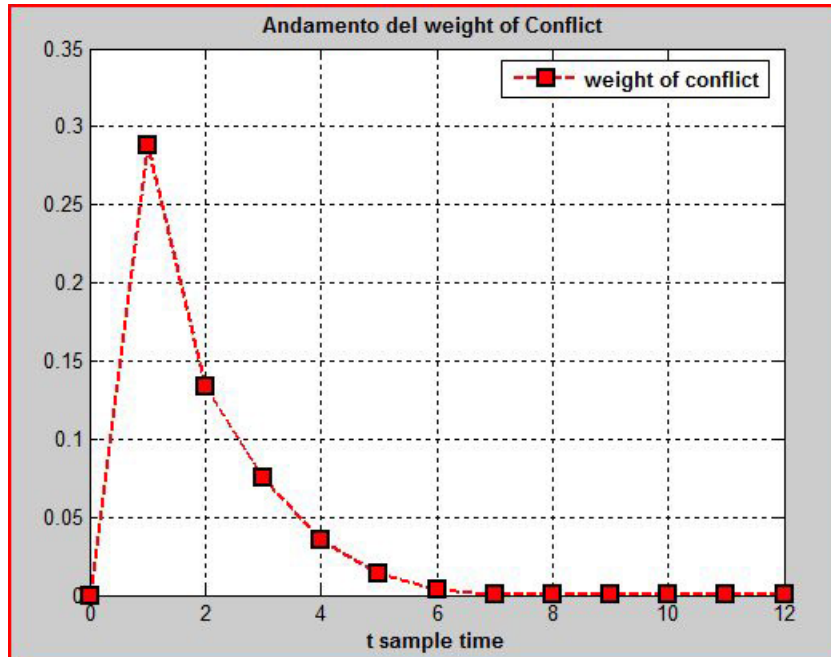


Figura 4.53: weight of conflict Yager-uniform

Dempster's Rule of Combination ed oltre

E' interessante osservare come in questo caso la Regola di Dempster converga allo stato finale più velocemente rispetto alla soluzione adottata con Yager 4.54. Infatti possiamo dire che si trova almeno un campione in anticipo 4.55. Anche l'andamento del conflitto converge più velocemente a zero rispetto a $k=0$ 4.56; questo semplice fatto è legato all'andamento piatto della massa dell'insieme Universale normalizzata 4.57 che va naturalmente a favore della $m(A)$. Inoltre osserviamo come la scelta della Regola di Dempster ad ogni step faccia coincidere i valori delle costanti di normalizzazione che comunque risultano più bassi rispetto alla regola di Yager 4.58. Questi comportamenti sono analoghi per valori di k maggiori.

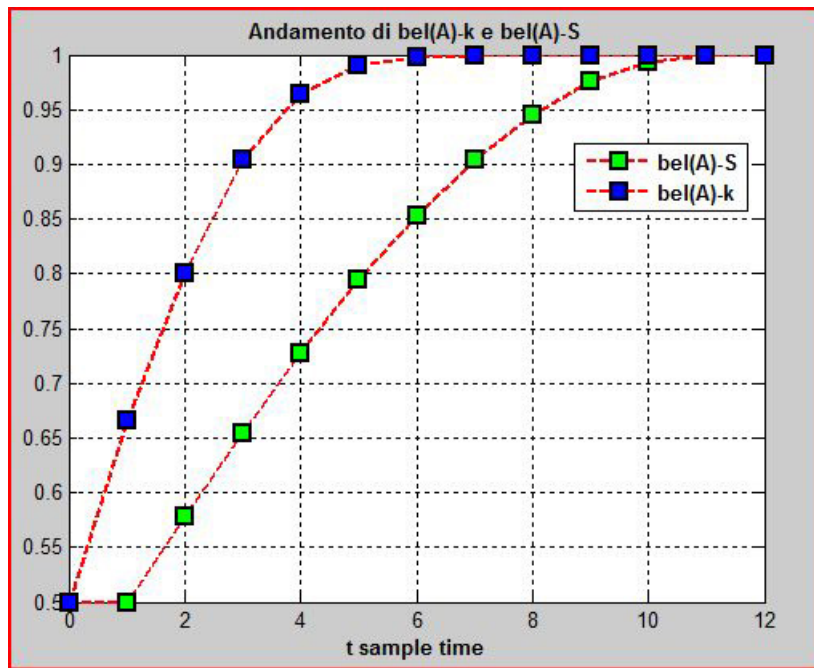


Figura 4.54: uniform-mass $bel(A)$

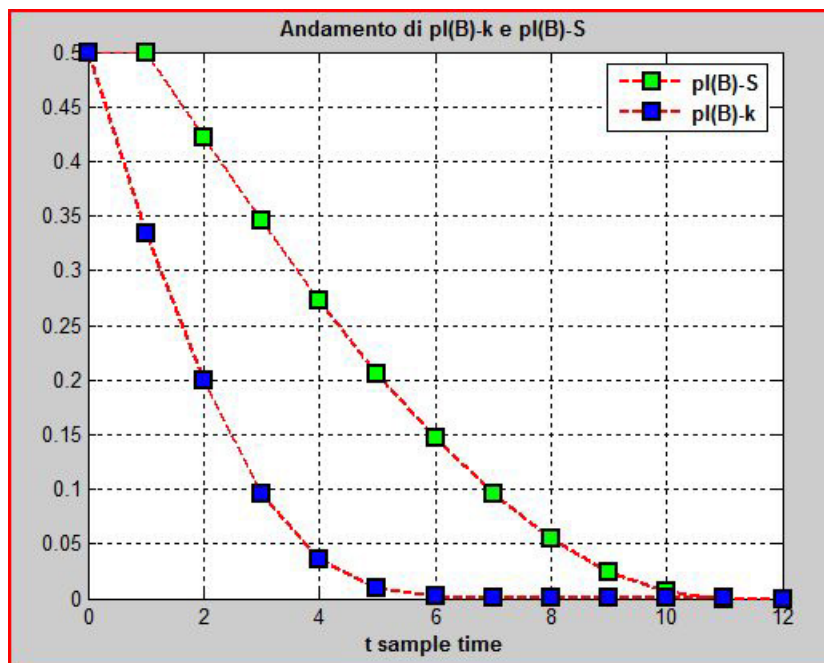


Figura 4.55: uniform-mass $pl(B)$

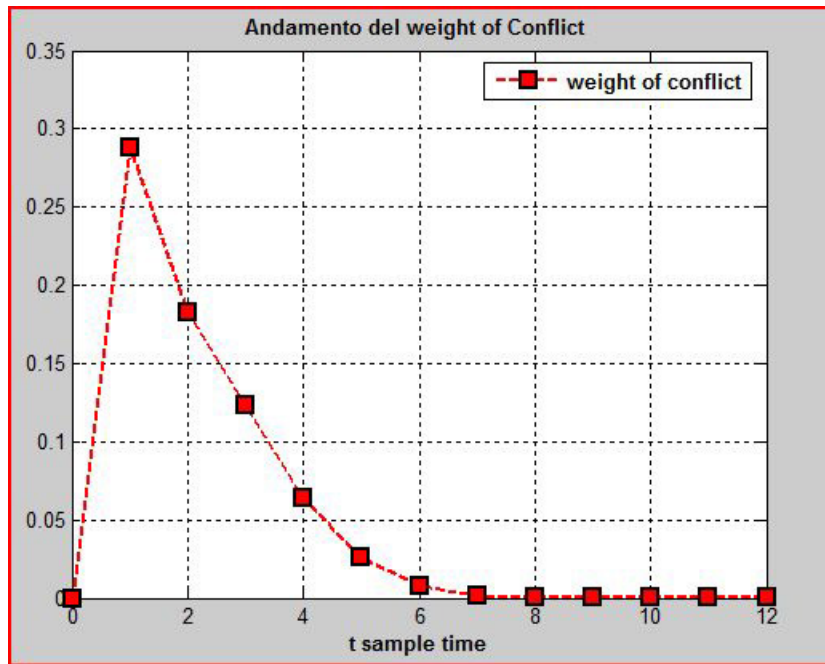


Figura 4.56: $m(X)$ uniform-distribution

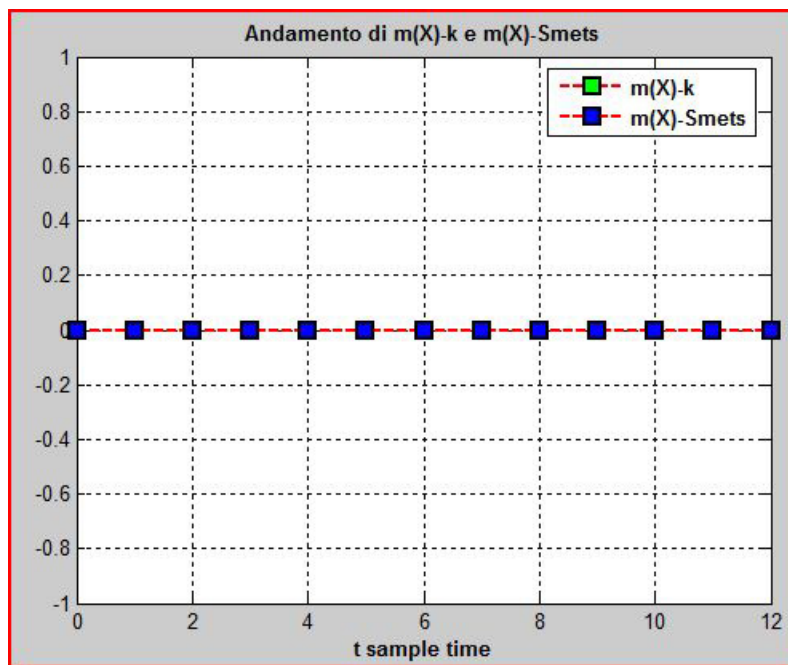


Figura 4.57: normalization constant-uniform

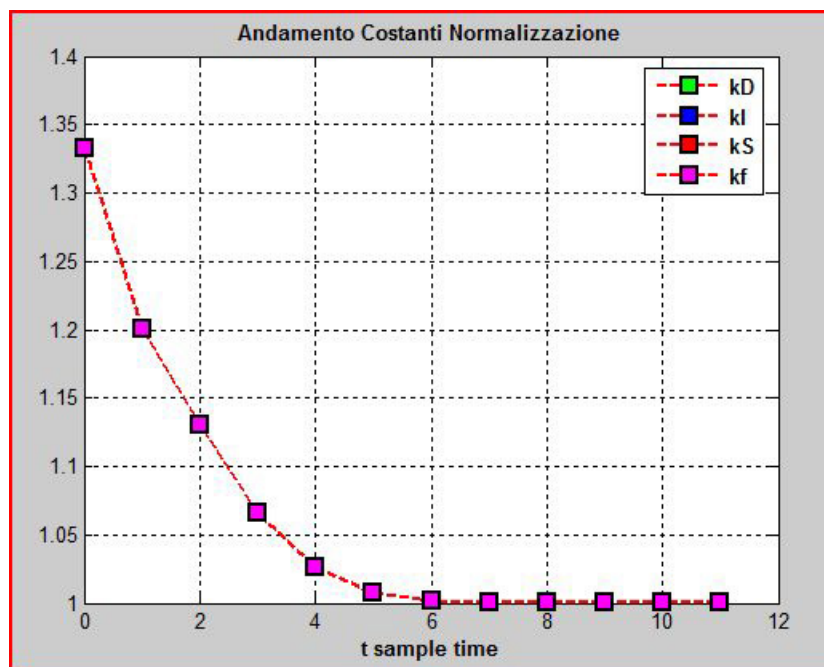


Figura 4.58: weight of conflict Dempster-uniform

Capitolo 5

Conclusioni e Sviluppi Futuri

Nelle soluzioni presentate nell'articolo di Inagaki, abbiamo individuato per le due rispettive politiche, le soluzioni più cautelative per mantenere la sicurezza del sistema. Tuttavia, spesso è preferibile evitare di disattivare inutilmente l'impianto, soprattutto poiché la successiva riattivazione può comportare ulteriori costi in termini di tempo e denaro.

In una situazione di **Fault-Warning safety control policy** possiamo diminuire la possibilità di disattivare inutilmente l'impianto scegliendo un valore minore di k però a discapito di una maggiore possibilità di non disattivare un'impianto non sicuro.

Mentre nella situazione di **Safety-preservation safety control policy** possiamo evitare di bloccare inutilmente l'impianto assegnando un valore maggiore di k , aumentando tuttavia la possibilità di incidenti.

Quindi alcuni sviluppi futuri che possono migliorare tale situazione sono:

- **k-optimization problem:** Formulare un problema di ottimizzazione che consenta di determinare una CombRule ottima, oppure un valore ottimo di k per ciascun tipo di safety-control policy. Nel nostro caso per la Safety-Preservation e per la Fault-Warning.
- **Associative-property** Determinare l'Ordine migliore per fondere le informazioni, quando si hanno più di due sorgenti all'interno del sistema e quindi considerando più di due belief structures relative alla sicurezza dell'impianto. Quindi indicando con $\mathbf{m}_1 \oplus \mathbf{m}_2$ la combinazione di due sorgenti, abbiamo che se risulta verificata la seguente proprietà:

$$((\mathbf{m}_1 \oplus \mathbf{m}_2) \oplus \mathbf{m}_3)(\mathbf{A}) = (m_1 \oplus (m_2 \oplus m_3))(A) \quad \forall A \subset X$$

Allora la Unified Combination Rule è **associativa**. Tuttavia questa proprietà è rispettata solo nel caso in cui $\mathbf{k} = \frac{1}{1-q(\emptyset)}$, ovvero per la regola di Dempster. (Che è uno dei pochi pregi di questa regola di combinazione, il cui utilizzo è consigliato in situazioni in cui il conflitto non è significativo). Tuttavia, se risolvendo un'opportuno problema di ottimizzazione otteniamo una CombRule differente da quella di Dempster, allora:

$$((\mathbf{m}_1 \oplus \mathbf{m}_2) \oplus \mathbf{m}_3)(\mathbf{A}) \neq (m_1 \oplus (m_2 \oplus m_3))(A) \quad \text{per qualche } A \subset X$$

Allora dobbiamo analizzare l'effetto della NoN-Associatività della CombRule ottima nella nostra Safety-control Policy.

- **Commutativity of CombRule:** Una CombRule è commutativa se:

$$\mathbf{m}_1 \oplus \mathbf{m}_2 = \mathbf{m}_2 \oplus \mathbf{m}_1$$

Tutte le CombRule nella famiglia parametrizzata risultano commutative, e ciò è una conseguenza logica della commutatività dell'operazione di moltiplicazione tra le masse nella fusione delle due bba che da luogo al vettore delle masse non normalizzate. Ci potrebbero essere situazioni in cui non si può dare per scontata tale proprietà. Sebbene spesso si suppone valida tale proprietà sia nella teoria della probabilità che nella D-S theory a volte è richiesto di estendere i modelli introducendo altre rappresentazioni, come un'asse temporale quando non si ritiene opportuno considerare valida la commutatività. Se vogliamo questa proprietà è legata alla stazionarietà del processo.

- Nell'applicazione della regola di combinazione si è supposto che le informazioni acquisite dagli agenti del sistema, fossero attendibili; pertanto è stata impiegata la Conjunctive Combination Rule per la fusione di due sorgenti, a partire dalla ground probability assignment. Tuttavia, in molte applicazioni, l'affidabilità delle misure o più in generale dei dati trasmessi dalle sorgenti possono essere discutibili. Questo aspetto può essere legato alla presenza di rumore sul canale oppure di qualche anomalia del sistema legata al guasto di uno o più componenti, o addirittura di un'agente esogeno (come ad esempio attacchi informatici in una Rete). L'aspetto della Reliability è una caratteristica importante, in quanto conferisce Robustezza al sistema. In merito sarebbe interessante studiare tale caratteristica, impiegando la Disjunctive Combination Rule e valutare possibili scenari per la determinazione del valore di K più idoneo.
- Una delle forte limitazioni del TBM è la sua intrinseca complessità computazionale, che risulta esponenziale; ciò pregiudica il suo utilizzo in processi o comunque sistemi, caratterizzati da numerose variabili (che risultano ordinari nei portfolio di problemi di Risk Management, nei sistemi diagnostici o nei processi industriali). Dunque, un problema aperto, per il quale non è stata proposta alcuna soluzione, è quello di trovare un modello alternativo; che risulti isomorfo al TBM e che richieda un minor sforzo computazionale.

Appendice

In questa Appendice viene riportato il codice **MATLAB**, commentato, che implementa il modello parametrico di Inagaki ed il corrispondente mapping tra il parametro \mathbf{K} ed $\alpha \in [-1 \ 1]$. Per quanto riguarda i moduli relativi alle trasformate di Möebius, viene impiegata la libreria implementata da Philippe Smets disponibile al seguente link: <http://india.ulb.ac.be/psmets>. Mentre per la parte che riguarda le simulazioni numeriche viene riportato solo il codice corrispondente al capitolo della Robotica Autonoma; per gli altri esempi riportati nei capitoli precedenti, è sufficiente impiegare i moduli base nel work space di Matlab.

NB: i file che appartengono alla libreria di Smets sono: mtoq, qtom, mtobel e mtopl.

Le chiamate e le invocazioni delle funzioni fanno riferimento solo ai moduli implementati ed ai moduli della libreria TBM di Smets. Il work space è l'ambiente operativo di Matlab

I file che compongono questo lavoro sono:

- **comb.m**: Funzione che calcola la combinazione di due bba secondo la regola di Dempster, Smets e Yager.
calls: mtoq, qtom.
called by: work space.
- **kVal.m**: Funzione che date due bba, calcola i valori che assume il parametro \mathbf{K} in corrispondenza delle regole di Dempster, Inagaki e la regola che ho personalmente battezzato Extreme Rule (la quale ridistribuisce anche la massa dell'insieme Universale ai focal elements del Power Set).
calls: smets (il modulo non viene riportato visto che è un segmento di comb.m)
called by: sdAsf.
- **ingk.m**: Funzione che calcola la combinazione di due bba in funzione del parametro \mathbf{K} secondo il modello di Inagaki.
calls: mtoq, qtom.
called by: sdAsf.
- **ingkFilter.m**: Funzione che calcola la combinazione di due bba in funzione del parametro $\alpha \in [-1 \ 1]$
calls: mtoq, qtom.
called by: sdAsf.
- **tuneK.m**: Funzione che date due bba ed il Range operativo di $\mathbf{K} \in [0 \ \mathbf{KM}]$ (dove il valore massimo si ottiene in corrispondenza della regola di Inagaki); determina i diversi valori che assume la bba ottenuta dalla loro combinazione, in funzione dei valori dell'intervallo.
NB: il numero di regole dipende dal passo di discretizzazione dell'intervallo.

calls: mtoq, qtom.

called by: work space.

- **helpViewerK.m:** Funzione che svolge il ruolo di interfaccia grafica per visualizzare i campioni delle simulazioni.
calls: nessun modulo specifico.
called by: work space.
- **ssf.m:** Funzione che costruisce una simple support function (ovvero una bba con l'insieme Universale ed un solo focal element), a partire dalla cardinalità del Power Set.
calls: nessun modulo specifico.
called by: *singleDataSi*.
- **wConf.m:** Funzione che calcola l'entità del conflitto.
calls: nessun modulo specifico.
called by: *sdAsf*.
- **singleDataSi.m:** Funzione che inizializza la serie storica della bba del Robot Mobile.
calls: *ssf*.
called by: work space.
- **m12tobel12.m:** Funzione che esegue la trasformata di Möebius (dal dominio della bba al dominio della belief) della serie storica.
calls: mtobel.
called by: *sdAsf*.
- **m12topl12.m:** Funzione che esegue la trasformata di Möebius (dal dominio della bba al dominio della plausibility) della serie storica.
calls: mtopl.
called by: *sdAsf*.
- **sdAsf.m:** Funzione che simula la fase di Updating dell'agente, in funzione della serie storica e della selezione del valore di α .
calls: *smets*, *wConf*, *ingkFilter*, *ingk*, *kVal*, *m12tobel12*, *m12topl12*.
called by: work space.

Listing 5.1: File comb.m

```

1  % Funzione che calcola la Combinazione di due masse secondo
2  % la Dempster's Rule of Combination.
3  % la Smets's Rule of Combination.
4  % la Yager's Rule of Combination.
5  % Input  : m1 vettore delle bba della sorgente 1
6  %         : m2 vettore delle bba della sorgente 2
7  % Output : vettori della combinazione m1*m2
8  %         m12D Dempster Combination
9  %         m12S Smets's Combination
10 %         m12Y Yager's Combination
11
12 function [m12D,m12S,m12Y]=comb(m1,m2)
13
14 % Calcolo della dimensione del frame of discernment
15 % ed inizializzazione del vettore d'appoggio per il conflitto
16
17 n = length(m1);
18 appk = zeros(n,1);
19
20
21 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
22 %                               SMETS'S RULE OF COMBINATION                               %
23 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
24
25 % Trasformazione dei vettori delle masse nelle rispettive
26 % Commonality functions mediante Mobius Transform
27
28 q1 = mtoq(m1);
29 q2 = mtoq(m2);
30
31 % convoluzione delle masse delle due sorgenti
32
33 q12 = diag(q1)*q2';
34
35 % Antitrasformata di Mobius per tornare nel dominio delle bba
36 % il vettore che ottengo è Relativo a Smets
37
38 m12S = qtom(q12);
39
40
41 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
42 %                               CONFLICT MASS OF THE EMPTY SET                               %
43 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
44
45 % Memorizziamo la massa dell'insieme vuoto corrispondente
46 % al conflitto tra le sorgenti del sistema
47
48 empty = m12S(1);
49
50 % Vettore che contiene il conflitto da ridistribuire tra
51 % gli elementi del Power Set
52
53 appk(1) = empty;
54
55 % Annullamento della massa dell'insieme vuoto E
56 % vettore dei focal combined elements con Zero mass to empty set
57
58 m12Ze = m12S'-appk;
59
60 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
61 %                               DEMPSTER'S RULE OF COMBINATION                               %
62 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
63
64 % Calcolo della costante di Normalizzazione K
65
66 k = 1 - empty;
67

```

```

68 % Normalizzazione e redistribuzione del conflitto tra
69 % i focal elements ottenuti dalla combinazione delle masse
70 % considerando il vettore m12Ze
71
72 m12D = k^(-1)*m12Ze;
73
74
75 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
76 %                YAGER'S RULE OF COMBINATION                %
77 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
78
79
80 % svuotamento della massa dell'insieme vuoto
81
82 m12Y = m12Ze;
83
84 % assegnazione della massa dell'empty set all'insieme
85 % Universale che rappresenta l'ignoranza
86
87 m12Y(n)=m12Y(n)+ empty;

```

Listing 5.2: File kVal.m

```

1  % Inagaki's K Extra-Rule of Combination Parameter value
2  % Dempster's K Rule of Combination Parameter value
3  %
4  % function[kD, kI, kS] = kVal(m1,m2)
5  %
6  % Input : m1  vettore delle bba della sorgente 1 (row vector)    1xn
7  %         m2  vettore delle bba della sorgente 2 (row vector)    1xn
8  %
9  % Output: kI  unified combination rule Upper Bound   (scalar)    1x1
10 %          kD  k value for Dempster's Rule           (scalar)    1x1
11 %          kS  k value for Uncertancy Filtering       (scalar)    1x1
12 %
13 % NB      : n è la Cardinalità del Power Set.
14 %          k = 0 Lower Bound (Yager's Rule)
15 %          kS > kI se m(X) è diverso da zero, altrimenti kS=kI=kD
16 %          ovvero non c'è ignoranza comune tra le sorgenti del sistema.
17 % Author: Ludovico Pinzari
18
19 function [kD,kI,kS]=kVal(m1,m2)
20
21 % Calcolo della dimensione del Power Set
22
23 n = length(m1);
24
25
26
27 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
28 %                CONJUNCTIVE COMBINATION RULE                %
29 %                NON-NORMALIZZATA                             %
30 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
31
32 m12S = smets(m1,m2);
33
34
35 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
36 %                CONFLICT MASS OF THE NULL SET              %
37 %                MASS OF THE UNIVERSAL SET                   %
38 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
39
40 % Memorizziamo la Massa dell'insieme vuoto corrispondente al
41 % conflitto tra le due sorgenti del sistema
42
43 qEmpty = m12S(1);
44
45 % Memorizziamo la Massa dell'insieme universale(X) corrispondente

```

```

46  % al grado d'ignoranza comune alle due sorgenti
47
48  qXset = m12S(n);
49
50
51  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
52  %                               K PARAMETER VALUES FOR                               %
53  %                               INAGAKI'S UNIFIED COMBINATION RULE                               %
54  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
55
56  %----- CALCOLO DEMPSTER'S K VALUE ----- %
57
58  kD = (1 - qEmpty)^(-1);
59
60  %----- CALCOLO UPPER BOUND K VALUE ----- %
61
62  kI = (1 - qEmpty - qXset)^(-1);
63
64  %----- CALCOLO EXTREME RULE K VALUE ----- %
65
66  if kI == kD
67      kS = kD;
68  else
69      kS = kI*(1+qXset/qEmpty);
70  end

```

Listing 5.3: File ingk.m

```

1  % Inagaki's Rule of Combination
2  %
3  % Input : m1 vettore delle bba della sorgente 1 (row vector)   1xn
4  %        m2 vettore delle bba della sorgente 2 (row vector)   1xn
5  %        k Inagaki's Rule Parameter (costant)
6  %
7  % Output: m12 vettore della combinazione m1*m2 (column vector) nxl
8  %
9  % NB : n è la Cardinalità del Power Set.
10 %
11 % Author: Ludovico Pinzari
12
13 function[m12k]=ingk(m1,m2,k)
14
15
16 % Calcolo della dimensione del Power Set
17 % ed inizializzazione del vettore d'appoggio per la
18 % costruzione dei focal elements e dell'universal set
19
20 n = length(m1);
21 appk = zeros(n,1);
22
23
24 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
25 %                               CONJUNCTIVE COMBINATION RULE                               %
26 %                               NON-NORMALIZZATA                                       %
27 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
28
29
30 % Trasformazione dei vettori delle masse nelle rispettive
31 % Commonality functions mediante Mobius Transform
32
33 q1 = mtoq(m1);
34 q2 = mtoq(m2);
35
36 % convoluzione delle masse delle due sorgenti
37
38 q12 = diag(q1)*q2';
39
40 % Antitrasformata di Mobius per tornare nel dominio delle bba

```

```

41  % il vettore che ottengo è Relativo a Smets (row vector)
42
43  m12S = qtom(q12);
44
45
46  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
47  %                CONFLICT MASS OF THE NULL SET                %
48  %                MASS OF THE UNIVERSAL SET                    %
49  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
50
51  % Memorizziamo la Massa dell'insieme vuoto corrispondente al
52  % conflitto tra le due sorgenti del sistema
53
54  qEmpty = m12S(1);
55
56  % Memorizziamo la Massa dell'insieme universale(X) corrispondente
57  % al grado d'ignoranza comune alle due sorgenti
58
59  qXset = m12S(n);
60
61
62  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
63  %                RE-DISTRIBUTION OF THE NULL SET MASS        %
64  %                TO THE FOCAL ELEMENTS C                      %
65  %                (C NOT EQUAL TO NULL SET, UNIVERSAL SET X )  %
66  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
67
68  % ----- VETTORI D'APPOGGIO PER LA RELAZIONE FINALE ----- %
69
70  % (1) utilizzo del vettore d'appoggio per la ri-distribuzione del null
71
72  appk(1) = qEmpty;
73  appk(n) = qEmpty;
74
75  % VETTORE che contiene il conflitto da ri-distribuire tra i C
76
77  qEmptyC = qEmpty*ones(n,1) - appk;
78
79
80  % (2) utilizzo del vettore d'appoggio per la costruzione del vettore
81  % dei focal elements C
82
83  appk(n) = appk(n) - qEmpty + qXset;
84
85  % VETTORE che contiene solo i Focal elements C (annullo Null e X)
86
87  qCset = m12S' - appk;
88
89  % (3) costruzione del terzo vettore della relazione
90
91  uno = ones(n,1);
92
93  % VETTORE che contiene valori unitari per i focal elements
94
95  uno(1) = 0;
96  uno(n) = 0;
97
98  % ----- RE-DISTRIBUZIONE DEL NULL SET A C ----- %
99
100
101  % VETTORE che contiene le bba finali dei focal elements
102
103  mKc = diag(qCset) * (uno + k * qEmptyC);
104
105
106  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
107  %                RE-DISTRIBUZIONE OF THE NULL SET MASS        %
108  %                TO THE UNIVERSAL SET X                      %

```

```

109 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
110
111 % (Scalare) calcolo della massa da attribuire all'insieme universale X
112
113
114 scale = (1 + k * qEmpty);
115 mku = (scale) * qXset + (scale - k) * qEmpty;
116
117
118
119 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
120 %                               FINAL BBA COMBINED STRUCTURE                               %
121 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
122
123 % fondiamo i due vettori che contengono le bba rispettive dei
124 % focal elements (C) e dell'insieme universale (X)
125
126 m12k = mKc;
127 m12k(n) = mku;

```

Listing 5.4: File ingkFilter.m

```

1  % Unified Combination Rule alpha parametr tuning
2  %
3  % function[kf] = ingkFilter(m1,m2,alpha)
4  %
5  % Input : m1  vettore delle bba della sorgente 1   (row vector)  1xn
6  %         m2  vettore delle bba della sorgente 2   (row vector)  1xn
7  %         alpha filtering parameter                 (scalar)      1x1
8  %
9  % Output: kf  k value for alpha filtering requirment (scalar)  1x1
10 %
11 % NB      : n è la Cardinalità del Power Set.
12 %          alpha appartiene [-1 1]
13 %
14 %          _____
15 %  PARAMETER | Yager | Dempster | Inagaki |
16 %  _____
17 %  alpha     | 1<----- 0 -----> 1   |
18 %
19 %
20 % Author: Ludovico Pinzari
21
22 function [kf]=ingkFilter(m1,m2,alpha)
23
24 % Calcolo della dimensione del Power Set
25
26 n = length(m1);
27
28
29
30 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
31 %                               CONJUNCTIVE COMBINATION RULE                               %
32 %                               NON-NORMALIZZATA                                         %
33 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
34
35 m12S = smets(m1,m2);
36
37
38 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
39 %                               CONFLICT MASS OF THE NULL SET                               %
40 %                               MASS OF THE UNIVERSAL SET                               %
41 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
42
43 % Memorizziamo la Massa dell'insieme vuoto corrispondente al
44 % conflitto tra le due sorgenti del sistema
45
46 qEmpty = m12S(1);

```



```

47
48 % Memorizziamo la Massa dell'insieme universale(X) corrispondente
49 % al grado d'ignoranza comune alle due sorgenti
50
51 qXset = m12S(n);
52
53
54 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
55 %                               K PARAMETER VALUES FOR                               %
56 %                               INAGAKI'S UNIFIED COMBINATION RULE                       %
57 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
58
59
60 %----- CALCOLO  DEMPSTER'S K VALUE ----- %
61
62 kD = (1 - qEmpty)^(-1);
63
64
65
66 if (alpha < 0)
67     kf = (1 - qEmpty + alpha*qXset)^(-1);
68 else
69     kf = (1-alpha)*kD;
70 end

```

Listing 5.5: File tuneK.m

```

1  % Inagaki's K TUNING for Unified Combination Rule
2  %
3  % function[m12k] = tuneK(m1,m2.kM,s)
4  %
5  % Input : m1   vettore delle bba della sorgente 1 (row vector)   1xn
6  %         m2   vettore delle bba della sorgente 2 (row vector)   1xn
7  %         kM   maximum tuning parameter value      (constant)    1x1
8  %         s    k-sampling-tuning step size        (constant)    1x1
9  %
10 % Output: m12k valori delle bba per k in [0 kM]   (matrix)      nxA
11 %
12 % NB      : 3 è la Cardinalità del Power Set ABC.
13 %          A dipende da kM e dal valore di s.
14 %          kM deve essere minore dell'Upper Bound e diverso da zero
15 %          (automaticamente calcola m12 con k=0)
16 %          Vedi metodo kVal
17 %
18 % Author: Ludovico Pinzari
19
20 function [m12k]=tuneK(m1,m2,kM,s)
21
22
23
24
25 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
26 %                               FIRST K VALUE (YAGER'S K=0)                               %
27 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
28
29 m12k0 = ingk(m1,m2,0);
30 m12k = m12k0;
31
32 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
33 %                               TRIAL AND ERROR TUNING                               %
34 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
35
36
37 % i valori successivi di m12 vengono calcolati con un passo pari a s%
38
39 for ki = 0+s:s:kM
40
41     % calcolo delle bba corrispondenti al valore di ki corrente

```

```

42
43     m12ki = ingk(m1,m2,ki);
44
45     % memorizzazione dell'andamento delle bba del Power Set
46
47     m12k = [m12k m12ki];
48
49
50 end
51
52 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
53 %                               VISUALIZZAZIONE DEI DATI                               %
54 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
55
56 %kk = 0:s:kM;
57
58 %figure
59 %   subplot(221)
60
61 %   plot(kk,mB,'--rs','LineWidth',2,...
62 %        'MarkerEdgeColor','k',...
63 %        'MarkerFaceColor','g',...
64 %        'MarkerSize',10)
65
66 %   grid, zoom on
67 %   title('Andamento di m(B)'),ylabel('bba m(B)'),xlabel('k values')
68 %   legend('m(B)')

```

Listing 5.6: File belplViewerK.m

```

1  %
2  % PLOTTING BBA BELIEF AND PLAUSIBILITY FOR K VALUES
3  % FOR TWO FOCAL ELEMENTS C,D of the vector
4  %
5  % function[ns] = belplViewerK(m12,bell12,pl12,kM,s,c,d)
6  %
7  % Input   m12   campioni della bba da plottare           (matrix) nxA
8  %         bell12 campioni della belief da plottare      (matrix) nxA
9  %         pl12  campioni della plausibility da plottare (matrix) nxA
10 %         kM    maximum k parameter value              (scalar) 1x1
11 %         s     k-sampling-tuning step size            (scalar) 1x1
12 %         c     a focal element                        (intero) 1x1
13 %         d     the other focal element                 (intero) 1x1
14 %
15 % Output: ns   flag per uscita funzione=0              (intero)
16 %
17 % NB:        kM e s non possono essere scelti arbitrariamente ma
18 %            dipendono dalla serie temporale di bell12 e pl12.
19 %            Per maggiori informazioni vedere tuneK che lo invoca.
20 %            c,d sono degli interi per accedere al vettore dei
21 %            campioni. (c,d) <= n
22 %
23
24 function[ns] = belplViewerK(m12,bell12,pl12,kM,s,c,d)
25
26 % il numero degli elementi del Power Set %
27
28 n = length(bell12(:,1));
29
30 % flag di uscita della funzione %
31
32 ns = 0;
33
34 kk = 0:s:kM;
35
36 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
37 %                               PLOTTING (BEL VS PL)                               %
38 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

```

39
40
41
42 %—— visualizzazione di bel(C) vs pl(C)——%
43
44 figure
45 %subplot(211)
46 plot(kk,bell12(c,:),'-rs','LineWidth',2,...
47       'MarkerEdgeColor','k',...
48       'MarkerFaceColor','g',...
49       'MarkerSize',10)
50
51 hold on
52 plot(kk,pl12(c,:),'-mo','LineWidth',2,...
53       'MarkerEdgeColor','k',...
54       'MarkerFaceColor','b',...
55       'MarkerSize',10)
56
57 grid, zoom on
58 axis([0 kM 0 1])
59 title('Andamento di bel(S) e pl(S)'), xlabel('kvalues')
60 legend('bel(S)', 'pl(S)')
61
62
63 %—— visualizzazione di bel(D) vs pl(D)——%
64
65 figure
66 %subplot(211)
67 plot(kk,bell12(d,:),'-rs','LineWidth',2,...
68       'MarkerEdgeColor','k',...
69       'MarkerFaceColor','g',...
70       'MarkerSize',10)
71
72 hold on
73 plot(kk,pl12(d,:),'-mo','LineWidth',2,...
74       'MarkerEdgeColor','k',...
75       'MarkerFaceColor','b',...
76       'MarkerSize',10)
77
78 grid, zoom on
79 axis([0 kM 0 1])
80 title('Andamento di bel(U) e pl(U)'), xlabel('kvalues')
81 legend('bel(U)', 'pl(U)')
82
83 %—— visualizzazione di bel(D) vs pl(D)——%
84
85 figure
86 %subplot(211)
87 plot(kk,bell12(2,:),'-rs','LineWidth',2,...
88       'MarkerEdgeColor','k',...
89       'MarkerFaceColor','g',...
90       'MarkerSize',10)
91
92 hold on
93 plot(kk,pl12(2,:),'-mo','LineWidth',2,...
94       'MarkerEdgeColor','k',...
95       'MarkerFaceColor','b',...
96       'MarkerSize',10)
97
98 grid, zoom on
99 axis([0 kM 0 1])
100 title('Andamento di bel(A) e pl(A)'), xlabel('kvalues')
101 legend('bel(A)', 'pl(A)')
102
103
104
105
106

```

```

107
108
109 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
110 %                               PLOTTING (m(A) VS m(B))                               %
111 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
112
113
114
115 %----- visualizzazione di m(A)-----%
116
117 figure
118 %subplot(211)
119 plot(kk,m12(c,:), '--rs', 'LineWidth', 0.1, ...
120      'MarkerEdgeColor', 'k', ...
121      'MarkerFaceColor', 'g', ...
122      'MarkerSize', 1)
123
124 grid, zoom on
125 %axis([0 kM 0 1])
126 title('Andamento di m(A)'), xlabel('kvalues')
127 legend('m(A)')
128
129 %----- visualizzazione di m(B)-----%
130
131 figure
132 plot(kk,m12(d,:), '--mo', 'LineWidth', 0.1, ...
133      'MarkerEdgeColor', 'k', ...
134      'MarkerFaceColor', 'b', ...
135      'MarkerSize', 1)
136      grid, zoom on
137 %axis([0 kM 0 0.0004])
138 title('Andamento di m(B)'), xlabel('kvalues')
139 legend('m(B)')
140
141
142 %----- visualizzazione di m(X)-----%
143
144 figure
145 plot(kk,m12(n,:), '--rs', 'LineWidth', 0.1, ...
146      'MarkerEdgeColor', 'k', ...
147      'MarkerFaceColor', 'g', ...
148      'MarkerSize', 1)
149
150 grid, zoom on
151 %axis([0 kM 0.9999 0.9996])
152 title('Andamento di m(X)'), xlabel('kvalues')
153 legend('m(X)')
154
155 %----- visualizzazione di bel(D) vs pl(D)-----%
156
157 %subplot(212)
158 %plot(kk,bel12(d,:), '--rs', 'LineWidth', 2, ...
159 %      'MarkerEdgeColor', 'k', ...
160 %      'MarkerFaceColor', 'g', ...
161 %      'MarkerSize', 10)
162 %hold on
163 %plot(kk,pl12(d,:), '--mo', 'LineWidth', 2, ...
164 %      'MarkerEdgeColor', 'k', ...
165 %      'MarkerFaceColor', 'b', ...
166 %      'MarkerSize', 10)
167 %grid, zoom on
168 %axis([0 kM 0 1])
169 %title('Andamento di bel(U) e pl(U)'), xlabel('kvalues')
170 %legend('bel(U)', 'pl(U)')
171
172
173
174 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

```

175 %          PLOTTING (BBA(X) VS BBA(C),BBA(D))          %
176 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
177
178
179 %----- visualizzazione di bba(X) X Universal set-----%
180
181 figure
182 subplot(2,2,[1 2])
183 plot(kk,m12(n,:), '—rs', 'LineWidth',2,...
184       'MarkerEdgeColor','k',...
185       'MarkerFaceColor','g',...
186       'MarkerSize',10)
187
188 grid, zoom on
189 title('Andamento di m(X)'), xlabel('kvalues')
190 legend('m(X)')
191
192 %----- visualizzazione di bba(C) focal element C-----%
193
194
195 subplot(2,2,3)
196 plot(kk,m12(c,:), '—rs', 'LineWidth',2,...
197       'MarkerEdgeColor','k',...
198       'MarkerFaceColor','g',...
199       'MarkerSize',10)
200
201 grid, zoom on
202 title('Andamento di m(S)'), xlabel('kvalues')
203 legend('m(S)')
204
205 %----- visualizzazione di bba(D) focal element D-----%
206
207
208 subplot(2,2,4)
209 plot(kk,m12(d,:), '—rs', 'LineWidth',2,...
210       'MarkerEdgeColor','k',...
211       'MarkerFaceColor','g',...
212       'MarkerSize',10)
213
214 grid, zoom on
215 title('Andamento di m(U)'), xlabel('kvalues')
216 legend('m(U)')

```

Listing 5.7: File ssf.m

```

1 % Simple Support Function for basic probability assignment
2 %
3 % Input : n    cardinalità del frame of discernment (scalar)    1x1
4 %         f    single focal element del Power Set (scalar)    1x1
5 %         bpaf basic probability assignment of f (scalar)    1x1
6 %
7 % Output: m    vettore della bba dell'ipotesi f=A (row vector) 1x(2^n)
8 %
9 % DEF ----- Simple Support Function definition (SSF)-----
10 %
11 %          | m(A) = bpaf      per A subset X      |
12 %  SSF---->| m(X) = 1-bpaf    X universal set    |
13 %          | 0                altrimenti        |
14 %
15 %
16 % NB: f < 2^n
17 %
18 % Author: Ludovico Pinzari
19
20 function [m]=ssf(n,f,bpaf)
21
22
23 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

```

24 %                               INIZIALIZZAZIONE                               %
25 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
26
27 % crea una bbm m di un frame of discernment formato da n parole
28 % lm: numero degli elementi del Power Set.
29
30 lm = 2^n;
31 m = zeros(1,lm);
32
33
34 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
35 %                               SIMPLE SUPPORT FUNCTION ASSIGNMENT           %
36 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
37
38 m(f) = bpaf;
39 m(lm) = 1-bpaf;

```

Listing 5.8: File wConf.m

```

1 %
2 %                               WEIGHT OF CONFLICT
3 %
4 % function[wk] = wConf(m12)
5 %
6 % Input:  m12 vettore delle bba (vector)
7 %
8 % Output: wk weight of conflict (scalar) 1x1
9 %
10 % m12 è indifferente row-column vectoe
11
12
13 function[wk] = wConf(m12)
14
15
16 wk = -log(1-m12(1));

```

Listing 5.9: File singleDataSi.m

```

1 % SENSOR DATA ACQUISITION FOR A SIMPLE SUPPORT FUNCTION
2 %
3 % function[mSi] = singleDataSi(n,f,bfa0,delta)
4 %
5 % Input : n      cardinalità del frame of discernment (scalar)      1x1
6 %         f      single focal element del Power Set (scalar)      1x1
7 %         bpaf0  basic probability assignment of f (scalar)      1x1
8 %         delta  variazione delle misure (vector)      1xnS
9 %
10 % Output: mSi  serie storica dei dati del sensore-i (matrix) (2^n)x(nSim)
11 %
12 % NB: f<n      :(Per maggiori dettagli vedere la funzione ssf)
13 %         nS    :il numero delle acquisizioni del Sensore
14 %         delta :(incremento)/(decremento) rispetto alla bba0 del
15 %               campione i-esimo.
16 %
17 % Author: Ludovico Pinzari.
18
19
20 function[mSi] = singleDataSi(n,f,bfa0,delta)
21
22
23 % numero dei campioni considerati (Number of Samples) %
24
25 nS = length(delta(1,:));
26
27 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
28 %                               INIZIALIZZATION OF THE FIRST DATA ACQUISITION %
29 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
30

```

```

31 % vettore che contiene il valore iniziale della bba di dimensione nS
32 % valore di riferimento rispetto al quale considerare la variazione.
33
34 mC = bfa0*ones(1,nS);
35
36 mSi = ssf(n,f,bfa0)';
37
38 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
39 %          CREATING THE N-1 DATA ACQUISITION SAMPLES          %
40 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
41
42 for i = 1:nS
43
44     % somma del valore iniziale della massa del focal element (bfa0) e del
45     % vettore incrementale. Per ottenere le misure del focal element. (C)
46
47     mCi = mC(i)+ delta(i);
48
49     % vettore che comprende l'insieme Universale ed il focal element %
50
51     mi = ssf(n,f,mCi)';
52
53     % costruzione del vettore della serie storica%
54
55     mSi = [mSi mi];
56 end

```

Listing 5.10: File m12tobel12.m

```

1 %          BBA SAMPLE TRANSFORMATION TO BELIEF
2 %
3 % function[bell12] = m12tobel12(m12)
4 %
5 % Input : m12   matrice delle bba                (matrix)   nxA
6 %
7 % Output: bell12 matrice delle belief            (matrix)   nxA
8 %
9 % NB:      n è il numero degli elementi del Power Set
10 %         A numero dei vettori bba da trasformare in bel
11 %
12 % Author: Ludovico Pinzari
13
14
15 function[bell12]=m12tobel12(m12)
16
17 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
18 %          NUMBER OF VECTORS SAMPLES          %
19 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
20
21 % numero totale dei vettori da trasformare
22
23 nsM12 = length(m12(1,:));
24
25 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
26 %          FIRST SAMPLE TRANSFORMATION (m to bel)          %
27 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
28
29 bell120 = mtobel(m12(:,1));
30 bell12 = bell120';
31
32
33 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
34 %          N-1 SAMPLES TRANSFORMATION (m to bel)          %
35 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
36
37 for i=2:nsM12
38
39     %conversione del campione i-esimo e memorizzazione%

```

```

40
41     bell12i = mtobel(m12(:,i));
42     bell12 = [bell12 bell12i'];
43
44 end

```

Listing 5.11: File m12topl12.m

```

1  %           BBA SAMPLE TRANSFORMATION TO PLAUSIBILIY
2  %
3  % function[pl12] = m12topl12(m12)
4  %
5  % Input : m12   matrice delle bba                (matrix)      nxA
6  %
7  % Output: pl12  matrice delle plausibility        (matrix)      nxA
8  %
9  % NB:         n è il numero degli elementi del Power Set
10 %             A numero dei vettori bba da trasformare in pl
11 %
12 % Author: Ludovico Pinzari
13
14
15 function[pl12]=m12topl12(m12)
16
17 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
18 %           NUMBER OF VECTORS SAMPLES           %
19 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
20
21 % numero totale dei vettori da trasformare
22
23 nsM12 = length(m12(1,:));
24
25 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
26 %           FIRST SAMPLE TRANSFORMATION (m to pl) %
27 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
28
29 pl120 = mtopl(m12(:,1));
30 pl12 = pl120';
31
32
33 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
34 %           N-1 SAMPLES TRANSFORMATION (m to pl) %
35 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
36
37 for i=2:nsM12
38
39     %conversione del campione i-esimo e memorizzazione%
40
41     pl12i = mtopl(m12(:,i));
42     pl12 = [pl12 pl12i'];
43
44 end

```

Listing 5.12: File sdAsf.m

```

1  % UNIFIED COMBINATION RULE FOR A SINGLE DATA ACQUISITION (1 SENSOR)
2  %           WITH CONSTANT VALUE IN THE MEASUREMENT
3  % Single Data Acquisition for Simple support Function (SdAsf)
4  %
5  % function[m12,Smets12] = SdAsf(mSi,m0,k,alpha)
6  %
7  % Input : mSi   m time series of the Sensor i      (matrix)      nxm
8  %           m0   stato iniziale della bba del sistema (vector)      1xn
9  %           alpha unified combination rule parameter (scalar)      1x1
10 %
11 % Output: m12   updating system time series        (matrix)      nx(m+1)
12 %           Smets12 Conjunctive Combination Rule series(matrix)      nx(m+1)
13 %           kvalues serie storica dei valori di k possibili

```



```

14 %
15 % NB: la scelta del parametro k è dettata dal sequent bound
16 %   k:[0 kI] dove kI è calcolato con Inagaki's Extra Rule
17 %   per maggiori dettagli vedere funzione kVal(m1,m2)
18 %   m12->(m+1) perchè contiene anche lo stato iniziale
19 %
20 % Author: Ludovico Pinzari
21
22
23 function[m12,Smets12,kvalues] = SdAsf(mSi,m0,k,alpha)
24
25 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
26 %   NUMBER OF ELEMENTS OF THE POWER SET   %
27 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
28
29 x = length(mSi(:,1));
30
31 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
32 %   SIMULATION NUMBER STEPS   %
33 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
34
35 %numero di acquisizioni totali da processare
36
37 nSim = length(mSi(1,:));
38
39
40 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
41 %   FIRST SIMULATION DATA-PROCESSING   %
42 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
43
44
45 %—— Vettore delle MASSE NON-NORMALIZZATE (Smets)———%
46
47 Smets120 = smets(m0,mSi(:,1));
48
49 % il primo campione lascio lo stato iniziale non è fusion
50
51 Smets12 = [m0' Smets120];
52
53
54
55 %—— WEIGHT OF CONFLICT———%
56
57 % il primo vettore viene inizializzato a zero
58
59 wk0 = wConf(m0);
60
61 % calcolo del w-conf della prima massa non normalizzata
62
63 wk120 = wConf(Smets120);
64 wk12 = [wk0 wk120];
65
66
67 %—— Calcoliamo il valore di K iniziale in base alle
68 % specifiche di filtraggio dettate dal valore di alpha
69
70 kf = ingkFilter(m0,mSi(:,1),alpha);
71
72
73 %—— Vettore delle MASSE NORMALIZZATE secondo il valore kf——%
74
75 %m120 = ingk(m0,mSi(:,1),k); modifica aggiornata
76 m120 = ingk(m0,mSi(:,1),kf);
77 m12 = [m0' m120];
78
79
80
81 %——Vettore che contiene i valori di K per ogni fusione——%

```

```

82  % inizializzo il suo valore con le prime due masse
83  % kf valore scelto
84
85  [kD,kI,kS] = kVal(m0,mSi(:,1));
86
87  %kvalues = [kD;kI;kS]; modifica aggiornata
88
89  kvalues = [kD;kI;kS;kf];
90
91  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
92  %          N-1 SIMULATION DATA-PROCESSING STEPS          %
93  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
94
95
96  for i = 2: nSim
97
98      %—— Calcolo MASSE NON-NORMALIZZATE ——%
99
100     Smets12i = smets(m12(:,i),mSi(:,i));
101     Smets12 = [Smets12 Smets12i];
102
103
104     %——Calcolo WEIGHT OF CONFLICT——%
105
106     wk12i = wConf(Smets12i);
107     wk12 = [wk12 wk12i];
108
109
110     %—— Calcolo Costante-Kf della specifica——%
111
112     kf = ingkFilter(m12(:,i),mSi(:,i),alpha);
113
114
115     %—— Calcolo COSTANTI-KD-KI-KS ——%
116
117     % calcola le costanti di normalizzazione
118     % relative alla bba Non-Normalizzate
119
120     [kD,kI,kS] = kVal(m12(:,i),mSi(:,i));
121
122     % kvaluesi = [kD;kI;kS]; modifica aggiunta
123
124     % aggiunta valore della costante kf scelta
125
126     kvaluesi =[kD;kI;kS;kf]
127
128     % memorizzazione serie storica di k
129
130     kvalues = [kvalues kvaluesi];
131
132     %—— Calcolo MASSE NORMALIZZATE ——%
133
134     %calcolo della bba corrente dell'istante t=i e
135     %memorizzazione del dato della combinazione
136
137     %scelta di evoluzione mediante valore esplicito%
138
139     %m12i = ingk(m12(:,i),mSi(:,i),k);
140
141     %scelta di evoluzione mediante valore implicito%
142
143     m12i = ingk(m12(:,i),mSi(:,i),kf);
144     m12 = [m12 m12i];
145
146
147
148
149

```

```

150
151 end
152
153
154 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
155 %          BELIEF AND PLAUSIBILITY TRANSFORMATION          %
156 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
157
158
159 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
160 %-----SENSOR BBA to belief-----%
161
162 bell2Si = m12tobell12(mSi);
163
164 %-----SENSOR BBA to plausibility-----%
165
166 pl12Si = m12topl12(mSi);
167
168
169 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
170 %-----FUSION BBA to belief-----%
171
172 bell12 = m12tobell12(m12);
173
174 %-----FUSION BBA to plausibility-----%
175
176 pl12 = m12topl12(m12);
177
178
179
180
181 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
182 %          VISUALIZZAZIONE DEI DATI          %
183 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
184
185
186 % vettore degli istanti di campionamento delle fusioni
187
188 t = 0:1:nSim;
189
190 % vettore per plottare l'andamento dei valori di k
191
192 tk = 0:1:nSim-1;
193
194 % aggiornamento ultimo campione delle acquisizioni per plottare
195
196 mSi = [mSi mSi(:,nSim)];
197
198
199
200 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
201 %          PLOTTING DELLA SERIE STORICA DEL SENSORE          %
202 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
203
204
205 %-----PLOTTING DI bel(A) Vs pl(A)-----%
206
207 %figure
208
209 % plot(tk,bell2Si(2,:),'--rs','LineWidth',2,...
210 %         'MarkerEdgeColor','k',...
211 %         'MarkerFaceColor','g',...
212 %         'MarkerSize',10)
213 % hold on
214
215 % plot(tk,pl12Si(2,:),'--rs','LineWidth',2,...
216 %         'MarkerEdgeColor','k',...
217 %         'MarkerFaceColor','b',...

```

```

218 %             'MarkerSize',10)
219
220 %   grid, zoom on
221 %title('Andamento di m(A)'),ylabel('bba m(A)'),xlabel('t sample time')
222 %legend('m(A)')
223
224 %axis([0 km 0 1])
225 %   title('Andamento di bel(A)-k e pl(A)'),xlabel('t sample time')
226 %   legend('bel(A)', 'pl(A)')
227
228
229 %----- PLOTTING DI bel(B) Vs pl(B)-----%
230
231 figure
232
233 %   plot(tk,bell2Si(3,:), '--rs', 'LineWidth', 2, ...
234 %         'MarkerEdgeColor', 'k', ...
235 %         'MarkerFaceColor', 'g', ...
236 %         'MarkerSize', 10)
237 %   hold on
238
239 %   plot(tk,pll2Si(3,:), '--rs', 'LineWidth', 2, ...
240 %         'MarkerEdgeColor', 'k', ...
241 %         'MarkerFaceColor', 'b', ...
242 %         'MarkerSize', 10)
243
244 %   grid, zoom on
245 %title('Andamento di m(A)'),ylabel('bba m(A)'),xlabel('t sample time')
246 %legend('m(A)')
247
248 %axis([0 km 0 1])
249 %   title('Andamento di bel(x) e pl(x)'),xlabel('t sample time')
250 %   legend('bel(x)', 'pl(x)')
251
252
253
254 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
255 %   PLOTTING DATA FUSION Vs SENSOR DATA ACQUISITION   %
256 %-----%
257
258 % Vengono plottati gli andamenti delle rispettive bba
259 % corrispondenti alla fusione delle masse relative allo
260 % Stato Aggiornato e la nuova acquisizione del sensore.
261
262
263
264
265 %----- PLOTTING DI m(A)-----%
266
267 figure
268
269 %   plot(t,m12(2,:), '--rs', 'LineWidth', 2, ...
270 %         'MarkerEdgeColor', 'k', ...
271 %         'MarkerFaceColor', 'g', ...
272 %         'MarkerSize', 10)
273 %   hold on
274
275 %   plot(t,mSi(2,:), '--rs', 'LineWidth', 2, ...
276 %         'MarkerEdgeColor', 'k', ...
277 %         'MarkerFaceColor', 'b', ...
278 %         'MarkerSize', 10)
279
280 %   grid, zoom on
281 %title('Andamento di m(A)'),ylabel('bba m(A)'),xlabel('t sample time')
282 %legend('m(A)')
283
284 %axis([0 km 0 1])
285 %   title('Andamento di m(A)-k e Sensor-m(A)'),xlabel('t sample time')

```

```

286     legend('m(A)-k','Sens-m(A)')
287
288
289 %----- PLOTTING DI m(B)-----%
290
291 figure
292
293     plot(t,m12(3,:),'-rs','LineWidth',2,...
294           'MarkerEdgeColor','k',...
295           'MarkerFaceColor','g',...
296           'MarkerSize',10)
297
298     hold on
299
300     plot(t,mSi(3,:),'-rs','LineWidth',2,...
301           'MarkerEdgeColor','k',...
302           'MarkerFaceColor','b',...
303           'MarkerSize',10)
304
305     grid, zoom on
306     %title('Andamento di m(A)'),ylabel('bba m(A)'),xlabel('t sample time')
307     %legend('m(A)')
308
309     %axis([0 kM 0 1])
310     title('Andamento di m(B)-k e Sensor-m(B)'),xlabel('t sample time')
311     legend('m(B)-k','Sens-m(B)')
312
313 %----- PLOTTING DI m(X)-----%
314
315 figure
316
317     plot(t,m12(x,:),'-rs','LineWidth',2,...
318           'MarkerEdgeColor','k',...
319           'MarkerFaceColor','g',...
320           'MarkerSize',10)
321
322     hold on
323
324     plot(t,mSi(x,:),'-rs','LineWidth',2,...
325           'MarkerEdgeColor','k',...
326           'MarkerFaceColor','b',...
327           'MarkerSize',10)
328
329     grid, zoom on
330     %title('Andamento di m(X)'),ylabel('bba m(X)'),xlabel('t sample time')
331     %legend('m(X)')
332
333     %axis([0 kM 0 1])
334     title('Andamento di m(X)-k e Sensor-m(X)'),xlabel('t sample time')
335     legend('m(X)-k','Sens-m(X)')
336
337
338 %----- PLOTTING BEL(B) Sensore Vs Bel(B) -----%
339
340 figure
341
342     plot(tk,bell2Si(3,:),'-rs','LineWidth',2,...
343           'MarkerEdgeColor','k',...
344           'MarkerFaceColor','g',...
345           'MarkerSize',10)
346
347     hold on
348
349     plot(t,bell2(3,:),'-rs','LineWidth',2,...
350           'MarkerEdgeColor','k',...
351           'MarkerFaceColor','b',...
352           'MarkerSize',10)
353
354     grid, zoom on

```

```

354 %title('Andamento di m(A)'),ylabel('bba m(A)'),xlabel('t sample time')
355 %legend('m(A)')
356
357 %axis([0 km 0 1])
358 title('Andamento di bel(B)-k e bel(B)-S'),xlabel('t sample time')
359 legend('bel(B)-S','bel(B)-k')
360
361
362
363 %----- PLOTTING PL(A) Sensore Vs Pl(A) -----%
364
365 figure
366
367 plot(tk,pl12Si(2,:), '--rs', 'LineWidth', 2, ...
368      'MarkerEdgeColor', 'k', ...
369      'MarkerFaceColor', 'g', ...
370      'MarkerSize', 10)
371
372 hold on
373
374 plot(t,pl12(2,:), '--rs', 'LineWidth', 2, ...
375      'MarkerEdgeColor', 'k', ...
376      'MarkerFaceColor', 'b', ...
377      'MarkerSize', 10)
378
379 grid, zoom on
380 %title('Andamento di m(A)'),ylabel('bba m(A)'),xlabel('t sample time')
381 %legend('m(A)')
382
383 %axis([0 km 0 1])
384 title('Andamento di pl(A)-k e pl(A)-S'),xlabel('t sample time')
385 legend('pl(A)-S','pl(A)-k')
386
387 %----- PLOTTING BEL(B) Vs BEL Sensore -----%
388
389 figure
390
391 plot(tk,bel12Si(2,:), '--rs', 'LineWidth', 2, ...
392      'MarkerEdgeColor', 'k', ...
393      'MarkerFaceColor', 'g', ...
394      'MarkerSize', 10)
395
396 hold on
397
398 plot(t,bel12(2,:), '--rs', 'LineWidth', 2, ...
399      'MarkerEdgeColor', 'k', ...
400      'MarkerFaceColor', 'b', ...
401      'MarkerSize', 10)
402
403 grid, zoom on
404 %title('Andamento di m(A)'),ylabel('bba m(A)'),xlabel('t sample time')
405 %legend('m(A)')
406
407 %axis([0 km 0 1])
408 title('Andamento di bel(B)-k e bel(B)-S'),xlabel('t sample time')
409 legend('bel(B)-S','bel(B)-k')
410
411 %----- PLOTTING PL(B) Sensore Vs Pl(B) -----%
412
413 figure
414
415 plot(tk,pl12Si(3,:), '--rs', 'LineWidth', 2, ...
416      'MarkerEdgeColor', 'k', ...
417      'MarkerFaceColor', 'g', ...
418      'MarkerSize', 10)
419
420 hold on
421
422 plot(t,pl12(3,:), '--rs', 'LineWidth', 2, ...
423      'MarkerEdgeColor', 'k', ...
424      'MarkerFaceColor', 'b', ...

```

```

422         'MarkerSize',10)
423
424     grid, zoom on
425     %title('Andamento di m(A)'),ylabel('bba m(A)'),xlabel('t sample time')
426     %legend('m(A)')
427
428     %axis([0 kM 0 1])
429     title('Andamento di pl(B)-k e pl(B)-S'),xlabel('t sample time')
430     legend('pl(B)-S','pl(B)-k')
431
432
433
434
435 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
436 % PLOTTING CONJUNCTIVE COMBINATION RULE (SMETS) %
437 % ----- %
438
439 % Viene plottato l'andamento delle masse Non Normalizzate
440 % m(X) vs m(NULL SET)
441 % m(NULL SET)= massa relativa al CONFLITTO
442 % m(X)= massa relativa all'IGNORANZA
443
444 %----- PLOTTING DI m(Null) Vs m(X)-----%
445
446 figure
447
448     plot(t,Smets12(1,:),'-rs','LineWidth',2,...
449          'MarkerEdgeColor','k',...
450          'MarkerFaceColor','r',...
451          'MarkerSize',10)
452
453     hold on
454
455     plot(t,Smets12(x,:),'-rs','LineWidth',2,...
456          'MarkerEdgeColor','k',...
457          'MarkerFaceColor','b',...
458          'MarkerSize',10)
459
460     grid, zoom on
461     %title('Andamento di m(A)'),ylabel('bba m(A)'),xlabel('t sample time')
462     %legend('m(A)')
463
464     %axis([0 kM 0 1])
465     title('Andamento di Conflitto e Ignoranza-Smets'),xlabel('t sample time')
466     legend('m(Null-set)','m(X)-Smets')
467
468 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
469 % PLOTTING WEIGHT OF CONFLICT %
470 %-----%
471
472 % viene plottato il peso del conflitto che dipende dal
473 % Null set
474
475 figure
476
477     plot(t,wk12(1,:),'-rs','LineWidth',2,...
478          'MarkerEdgeColor','k',...
479          'MarkerFaceColor','r',...
480          'MarkerSize',10)
481
482     grid, zoom on
483     %title('Andamento di m(A)'),ylabel('bba m(A)'),xlabel('t sample time')
484     %legend('m(A)')
485
486     %axis([0 kM 0 1])
487     title('Andamento del weight of Conflict '),xlabel('t sample time')
488     legend('weight of conflict')
489

```

```

490 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
491 %   PLOTTING K-PARAMETER RANGE VALUES                               %
492 % ----- %
493
494 % Vengono plottati i valori delle costanti di Normalizzazione
495 % Kd Dempster's Rule of Combination
496 % kI Inagaki's Rule of Combination
497 % kS Extreme Filtering Ignorance (Ignorance gap = 0)
498
499 %----- PLOTTING DI m(Null) Vs m(X)----- %
500
501 figure
502
503     plot(tk,kvalues(1:),'-rs','LineWidth',2,...
504          'MarkerEdgeColor','k',...
505          'MarkerFaceColor','g',...
506          'MarkerSize',10)
507
508     hold on
509
510     plot(tk,kvalues(2:),'-rs','LineWidth',2,...
511          'MarkerEdgeColor','k',...
512          'MarkerFaceColor','b',...
513          'MarkerSize',10)
514
515     hold on
516
517     plot(tk,kvalues(3:),'-rs','LineWidth',2,...
518          'MarkerEdgeColor','k',...
519          'MarkerFaceColor','r',...
520          'MarkerSize',10)
521
522     hold on
523
524     plot(tk,kvalues(4:),'-rs','LineWidth',2,...
525          'MarkerEdgeColor','k',...
526          'MarkerFaceColor','m',...
527          'MarkerSize',10)
528
529     grid, zoom on
530     %title('Andamento di m(A)'),ylabel('bba m(A)'),xlabel('t sample time')
531     %legend('m(A)')
532
533     %axis([0 kM 0 1])
534     title('Andamento Costanti Normalizzazione'),xlabel('t sample time')
535     legend('kD','kI','kS','kf')
536
537 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
538 %   PLOTTING NORMALIZED BBA Vs NON-NORMALIZED BBA                   %
539 % ----- %
540
541 % Vengono plottati gli andamenti delle rispettive bba
542 % corrispondenti alla fusione delle masse relative allo
543 % Stato Aggiornato -> bba Normalizzata. E l'andamento
544 % della bba Non-Normalizzata.
545
546 %----- PLOTTING DI m(A)-k Vs m(A)-Smets----- %
547
548 figure
549
550     plot(t,m12(2:),'-rs','LineWidth',2,...
551          'MarkerEdgeColor','k',...
552          'MarkerFaceColor','g',...
553          'MarkerSize',10)
554
555     hold on
556
557     plot(t,Smets12(2:),'-rs','LineWidth',2,...
558          'MarkerEdgeColor','k',...
559          'MarkerFaceColor','b',...

```



```
558         'MarkerSize',10)
559
560     grid, zoom on
561     %title('Andamento di m(A)'),ylabel('bba m(A)'),xlabel('t sample time')
562     %legend('m(A)')
563
564     %axis([0 kM 0 1])
565     title('Andamento di m(A)-k e m(A)-Smets'),xlabel('t sample time')
566     legend('m(A)-k','m(A)-Smets')
567
568
569
570 %-----PLOTTING DI m(X)-k Vs m(X)-Smets-----%
571
572 figure
573
574     plot(t,m12(x,:),'-rs','LineWidth',2,...
575          'MarkerEdgeColor','k',...
576          'MarkerFaceColor','g',...
577          'MarkerSize',10)
578
579     hold on
580
581     plot(t,Smets12(x,:),'-rs','LineWidth',2,...
582          'MarkerEdgeColor','k',...
583          'MarkerFaceColor','b',...
584          'MarkerSize',10)
585
586     grid, zoom on
587     %title('Andamento di m(A)'),ylabel('bba m(A)'),xlabel('t sample time')
588     %legend('m(A)')
589
590     %axis([0 kM 0 1])
591     title('Andamento di m(X)-k e m(X)-Smets'),xlabel('t sample time')
592     legend('m(X)-k','m(X)-Smets')
```

Bibliografia

- [1] A. P. Dempster, *Upper and lower probabilities induced by a multiplevaluedmapping*, Ann. Math. Statistic (1967), 325 - 339, (1967)- Capitolo 1
- [2] A. P. Dempster, *A generalization of Bayesian inference*, Journal of the Royal Statistical Society, series B 30, pp. 205 - 247 (1968) - Capitolo 1
- [3] Bruno de Finetti, *Teoria della Probabilità*, Giulio Einaudi, Torino. pp. 215 - 216 (la determinazione delle probabilità soggettive) (1970) - Capitolo 1
- [4] G. Shafer, *A mathematical theory of evidence*, Princeton Univ. Press. Princeton, NJ, pp. 35 - 113 1976) - Capitolo 1
- [5] J. Bernoulli, *Ars Conjectandi*, Basilea. Parte IV tradotta in inglese Bing Sung e disponibile come Technical Report NO.2 of the Department of Statistics of Harvard University Feb (1966) - Capitolo 1
- [6] R. Scozzafava, *Incertezza e Probabilità: significato, valutazione, applicazioni della probabilità soggettiva*. Zanichelli pp. 14,34. (2000) - Capitolo 1
- [7] K. Sentz, S. Ferson, *Combination of Evidence in Dempster-Shafer Theory*. SANDIA REPORT April (2002) - Capitolo 1
- [8] J. Scott, *A study of Dempster-Shafer's theory of evidence in comparison to Classic Probability Combination* June, (2009) - Capitolo 1
- [9] T. Inagaky, *Interdependence Between Safety-Control Policy And Multiple-Sensor Scheme Via Dempster - Shafer Theory*. senior Member. IEEE Transaction On Reliability vol 40, NO.2 June (1991) - Capitolo 1
- [10] P. Smets, *The Application of the Matrix Calculus to Belief Functions* August 10, (2004) - Capitolo 2
- [11] P. Smets, *Belief Function And the Transferabel Belief Model* (2004) - Capitolo 2
- [12] P. Smets, <http://india.ulb.ac.be/psmets> libreria TBM per Matlab (2004) - Capitolo 2
- [13] Kennes, *Computational Aspects of the Möebius Transform of a Graph* IEEE-SMC, 22, 201 - 223 (1992) - Capitolo 2
- [14] Zou Yi, Ao Yeong Khing, C.C. Song, *Multi - ultrasonic fusion for autonomus mobile robots* - Capitolo 4