Mobile Robot Trajectory Tracking Using MPC [1]

Ludovico Pinzari
Dipartimento di Informatica e Automazione
Università degli Studi "Roma TRE

13 marzo 2010

[1] Rev. 7.0

Indice

Elenco delle figure

Elenco delle tabelle

Capitolo 1

Mobile Robot Trajectory Tracking Using Model Predictive Control

1.1 Introduzione

In questo lavoro viene affrontato il problema dell'inseguimento della traiettoria di un robot mobile caratterizzato da vincoli non-olonomi. In particolare affronteremo il **Trajectory Tracking Problem of NonHolonomic Wheeled Mobile Robot (WMR)**, utilizzando la strategia dell'**MPC**.

La scelta di utilizzare questa metodologia di controllo è motivata dalla possibilità di considerare in modo diretto i vincoli del problema legati al segnale di controllo ed allo stato del processo. Il problema viene affrontato formulando un indice di performance che viene minimizzato durante la fase di calcolo della legge di controllo da implementare.

In particolare studieremo due approcci:

1. **Non-Linear Model Predictive Control (NMPC)**
2. **Linear Model Predictive Control (LMPC)**

Nel primo approccio si arriverà a formulare un problema di ottimizzazione *non convesso*. Tuttavia, la minimizzazione di una funzione non convessa richiede un'onere computazionale non indifferente e per questo motivo viene proposto un secondo approccio il Linear Model Predictive Control.

Nel **LMPC**, l'idea fondamentale consiste nell'effettuare una successione di linearizzazioni del modello che conducono quindi ad un sistema Lineare Non-Stazionario. A partire da questa descrizione lineare è possibile impostare un problema di ottimizzazione Quadratica (che viene risolto ad ogni step), il quale ovviamente risulta convesso e computazionalmente meno oneroso rispetto al caso precedente.

Per completare lo studio vengono confrontate le due soluzioni proposte da un punto di vista computazionale in modo da valutare l'effettiva implementazione in tempo Reale.

1.2 Problem Formulation

Il modello del Robot mobile è costituito da un corpo rigido e da ruote non deformabili. Inoltre supponiamo che il moto del veicolo avvenga senza slittare su un piano orizzontale. 1.1

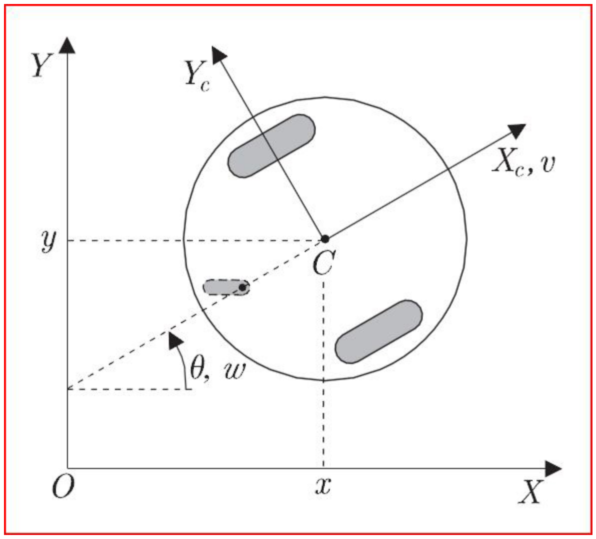

Figura 1.1: **Coordinate System of Wmr**

Quindi il modello cinematico è descritto dalle seguenti equazioni: 1.1

$$\begin{cases} \dot{x} = v \cdot cos\theta \\ \dot{y} = v \cdot sin\theta \\ \dot{\theta} = \omega \end{cases} \tag{1.1}$$

dove $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x & y & \theta \end{bmatrix}$, descrive la configurazione (posizione ed orientamento) del centro assiale delle ruote, **C**, rispetto ad un sistema inerziale $\{O, X, Y\}$, mentre $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} v & w \end{bmatrix}$ è il segnale di controllo di input, dove le componenti v e w sono rispettivamente la velocità lineare ed angolare.

Dato che in un sistema MPC la nostra legge di controllo viene calcolata in istanti di tempo discreti, occorrerà discretizzare il modello di partenza. Quindi indicando con **T** il passo di campionamento, e con **k** l'istante di campionamwento, utilizzando l'approssimazione di Eulero si ricava il corrispondente modello cinematico discretizzato: 1.2

$$\begin{cases} x(k+1) = x(k) + v(k) \cdot cos\theta(k) \cdot T \\ y(k+1) = y(k) + v(k) \cdot sin\theta(k) \cdot T \\ \theta(k+1) = \theta(k) + \omega(k) \cdot T \end{cases} \tag{1.2}$$

Oppure utilizzando una notazione più compatta si ha:

$$x(k+1) = f_d(x(k), u(k)) \tag{1.3}$$

Quindi per risolvere il Trajectory Tracking Problem, dobbiamo determinare una legge di controllo tale che:

$$x(k) - x_r(k) = 0 \tag{1.4}$$

Dove x_r è la traiettoria di riferimento desiderata per il nostro sistema. Quindi la traiettoria pianificata del planner è:

$$\dot{x}_r = f(x_r, u_r) \tag{1.5}$$

E l'equivalente sistema discretizzato è:

$$x_r(k+1) = f_d(x_r(k), u_r(k)). \tag{1.6}$$

1.3 The Non Linear MPC Strategy

L' Mpc è una strategia di controllo ottima che ricorre all'utilizzo del modello dinamico del sistema per determinare la sequenza di campioni ottimi di controllo, in funzione della minimizzazione del funzionale di costo. Ad ogni istante di campionamento il modello viene impiegato per prevedere il comportamento del sistema su un certo orizzonte temporale.

A partire da queste previsioni, la funzione obiettivo viene minimizzata ad ogni istante di campionamento, in modo da determinare la sequenza dei campioni di Input ottima da applicare al sistema negli istanti di tempo successivi. Sebbene la previsione e l'ottimizzazione sono valutate su tutto l'orizzonte temporale, solo i valori degli inputs corrispondenti al corrente istante di campionamento vengono implementati. Il procedimento viene dunque ripetuto per gli istanti di campionamento successivi con le nuove misure ed una Time Window traslata. Tale meccanismo è noto come **Moving/ Reciding Horizon Strategy**.

Quindi la previsione della traiettoria del robot è:

$$x(k+j+1|k) = f_d(x(k+j|k), u(k+j|k)) \tag{1.7}$$

Dove $j \in \big[0, N-1\big]$ e la notazione $a(m|n)$ rappresenta il valore di a all'istante m predetto all'istante n. Quindi a partire dalla definizione degli errori:

$$\begin{aligned} &\textbf{State Error}: \quad \tilde{x} = x - x_r \\ &\textbf{Input Error}: \quad \tilde{u} = u - u_r. \end{aligned} \tag{1.8}$$

possiamo formulare la funzione obiettivo:

$$\Phi(k) = \sum_{j=1}^{N} \tilde{x}^T(k+j|k) \cdot Q \cdot \tilde{x}(k+j|k) + \tilde{u}^T(k+j-1|k) \cdot \tilde{R} \cdot u(k+j-1|k). \tag{1.9}$$

Dove **N** è l'orizzonte di predizione e $\mathbf{Q} \geq \mathbf{0}$ e $R > 0$ sono le matrici che contengono i pesi da attribuire alla penalizzazione dello stato e delle variabili di controllo. Inoltre viene considerato un'ulteriore vincolo sull'ampiezza delle variabili di Input:

$$u_{min} \leq u(k+j|k) \geq u_{max}. \tag{1.10}$$

Dove u_{min} e u_{max} rappresentano rispettivamente il Lower Bound e L'Upper Bound della saturazione. L'equazione può essere scritta in forma più compatta:

$$D \cdot u(k+j|k) \leq d \tag{1.11}$$

con

$$D = \begin{bmatrix} I \\ -I \end{bmatrix} \qquad d = \begin{bmatrix} u_{max} & -u_{min} \end{bmatrix} \tag{1.12}$$

Pertanto, il problema di ottimizzazionenon lineare è:

$$x^*, u^* = argmin_{x,u}\{\Phi(k)\} \tag{1.13}$$

con

$$x(k|k) = x_0 \tag{1.14}$$

$$x(k+j+1|k) = f_d(x(k+j|k), u(k+j|k)) \tag{1.15}$$

$$D \cdot u(k+j|k) \leq d \tag{1.16}$$

Dove $j \in \big[0, N-1\big]$. x_0 è la condizione iniziale che corrisponde al valore degli istanti misurati negli istanti correnti. Il vincolo (1.15) rappresenta il modello di predizione, il vincolo (1.16) è la saturazione dell'ingresso che può essere presente o meno nel problema di ottimizzazione. Si osserva che le variabili da decidere sono sia quelle dello stato che le variabili di controllo.

Il problema di ottimizzazione **(7)-(10)** deve essere quindi risolto ad ogni istante di campionamento k, dove la sequenza di stati ottimi calcolati all'istante k sono $\{\mathbf{x}^*(\mathbf{k+1|k}), \ldots, x^*(k+N|k)\}$ e quella relativa agli ingressi di controllo $\{\mathbf{u}^*(\mathbf{k|k}), \ldots, u^*(k+N-1|k)\}$ ed il costo associato $\Theta^*(k)$. La legge di controllo MPC è definita implicitamente dalla prima azione di controllo della sequenza ottima, ovvero $\mathbf{u}^*(\mathbf{k|k})$ e la parte restante viene cancellata.

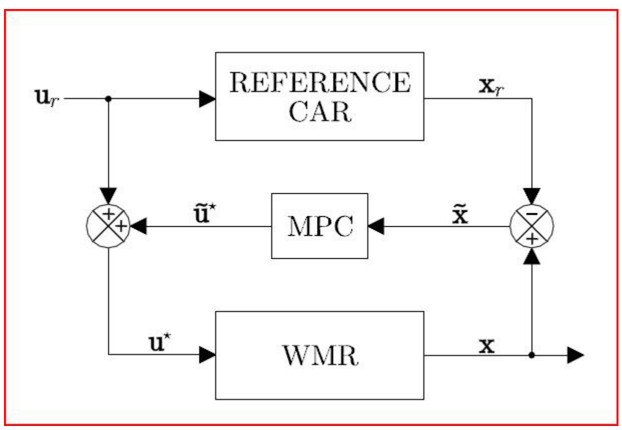

Figura 1.2: **Block Diagram**

Come Case Study, consideriamo il **Robot Twil** (Lages 1998) 1.3

Il quale presenta i seguenti limiti sulle ampiezze delle variabili di controllo:

$$\mathbf{u_{max}} = \mathbf{u_{min}} = \begin{bmatrix} 0.47\ m/s \\ 3.77\ rad/s \end{bmatrix} \tag{1.17}$$

Utilizzando una traiettoria di riferimento ad '**U**' e regolando i parametri di controllo sui seguenti valori:

$$\mathbf{N} = 5, \quad \mathbf{Q} = diag(1; 1; 0.5), \quad \mathbf{R} = diag(0.1; 0.1) \tag{1.18}$$

E con condizione inizialiale $\mathbf{x_0} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ si ottengono

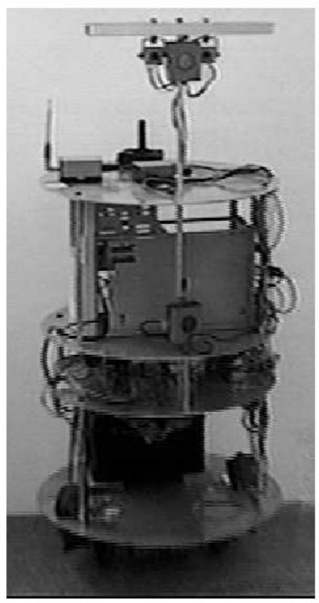

Figura 1.3: **Twill Robot**